

СНЕЖАНА ГОРДИЋ¹

БОЈАН ЛАЗИЋ²

МАРИНА МИЛОШЕВИЋ³

Универзитет у Новом Саду

Педагошки факултет у Сомбору

СТРУЧНИ ЧЛАНАК

UDK: 511.11:37.091.3(091)

BIBLID: 0353-7129, 27(2022)2, p.227-235

ИСТОРИЈСКА ГЕНЕЗА ПОЈМА БРОЈА И БРОЈЕВНИХ СИСТЕМА – МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ (II)

Резиме: Историја математике и њена открића имају значајну улогу у савременој настави математике, јер повећавају мотивацију и интересовање ученика за предмет. Циљ рада је да се на темељу кратког прегледа постојећих истраживања о употреби историје математике у настави математике, сагледају могућности њене примене у пракси. Приказани су примери задатака у вези са историјом природних бројева и бројевних система који се могу применити у почетној настави математике. У закључку рада сумиран је преглед бројевних система кроз историју (НОРМА XXVII, 1/2022, I део), са посебним освртом на значај позиционог бројевног система, односно на предности индијско-арапског система, са препорукама за увођење ових садржаја у почетну наставу математике.

Кључне речи: историја математике, бројевни системи, задаци, разредна настава математике

Увод

Математика као организовани мисаони систем у непрекидном развоју започиње свој развој са настанком првих цивилизацијских култура, првенствено из практичних потреба. Појам природног броја, који настаје као резултат постепеног апстраховања, основа је целокупног даљег развоја математике. Полазећи од историјске генезе појма броја и бројевних система изложених у првом делу чланка (НОРМА XXVII, 1/2022), у овом делу (II) указано је на значај примене историје математике у настави математике, са примерима задатака који се могу применити у разредној настави математике. Имајући у виду да историја матема-

1 snezana.gordic@pef.uns.ac.rs

2 bojan.lazic@pef.uns.ac.rs

3 marina.milosevic@pef.uns.ac.rs

тике и њена открића имају значајну улогу у настави математике, циљ овог дела рада је да се сагледају и оснаже идеје и препоруке да се историјске чињенице о развоју бројевних система и овакви задаци уврсте у наставу математике. На тај начин би се, оправдано претпостављамо, битно допринело повећању ефикасности наставног процеса, односно ученичких постигнућа, као и обогаћивању математичких знања и математичке културе ученика.

Историја математике и настава математике

У развоју система васпитања и образовања изузетну улогу има подизање квалитета и ефикасности математичког образовања. Улога математике као наставног предмета увиђа се тек када се историјски сагледају њена улога и место у процесу образовања. Постоје бројна истраживања о значају коришћења садржаја из историје математике у настави математике, јер доприносе подстицању мотивације ученика за учење математичких садржаја и повећању њихове активности у процесу учења (Lazić & Maričić, 2019). Имајући у виду да историја математике и њена открића могу имати значајну улогу у математичком образовању данас, у наставку ћемо дати кратак приказ неких истраживања.

Маричић и Лазич, анализирајући радове познатих истраживача математичког образовања (Poenkare 1908, Klajn 1914, Polya 1954, De Morgan 1958, Fraudenthal 1980, Kooper 1996) констатују да ови стално указују на улогу и значај интуитивних, спонтано стечених знања које укључује елементе историје математике у настави, као један од неопходних услова за повећање мотивације и интересовања ученика у обради апстрактних математичких садржаја на свим нивоима (Maričić & Lazić, 2020). Имајући у виду многобројне бенефите примене историје математике и њених открића у математичком образовању, аутори у раду скрећу пажњу на древну рачунаљку – абакус и указују на њену улогу, значај, вредности и могућности које може остварити у раду са децом. Овде посебно истичу као најзначајније концептуално разумевање менталне аритметике и развијање способности менталног рачунања и решавања проблема, стицање јасне менталне представе о структури бројева, њиховој величини и односу, разумевање месне вредности цифре, али и развијање мотивације и позитивних ставова према математици (Maričić & Lazić, 2020).

Дејић и Михајловић су испитивали мишљења и ставове учитеља о могућности коришћења садржаја историје математике у настави. Резултати њиховог истраживања су показали да већина учитеља има позитиван став према коришћењу историје математике у настави, али ипак такве садржаје не користе у настави. Учители најчешће наводе следеће разлоге зашто не користе историју математике у настави: недостатак одговарајуће литературе, недостатак методичких упутстава и недовољно времена због реализовања обавезног програма (Dejić & Mihajlović, 2014). Дејић и Михајловић сматрају да постоје начини да се исто-

рија математике шире користи у настави и да је најефикаснији начин за то да се елементи историје математике укључе у уџбенике математике. Они напомињу да не треба претеривати са историјским чињеницама како се не би оптеретила математичка настава (Дејић и Михајловић, 2015).

Натараж [Nataraj] и Томас [Thomas] су истраживали употребу комбинације учења историјских чињеница о развоју великих бројева и бројевних система са моделовањем различитих фаза у развоју бројевних система уз помоћ различитих материјала. Резултати су показали да је овај приступ помогао ученицима да стекну компетенције у именовану и употреби великих бројева, као и у разумевању позиционе нотације (Nataraj & Thomas, 2009).

Гоктепе [Goktepe] и Оздмир [Ozdemir] наводе да активности из математике могу развити позитивне ставове ученика према математици. Значај њиховог истраживања је у интердисциплинарном повезивању математике и историје као различитих дисциплина (Goktepe & Ozdemir, 2013).

Хо [Ho] истражује употребу историје математике у настави математике у Сингапуру и указује на три значајна аспекта употребе историје математике у настави: потенцијал, ограничења и ризике. Истраживање показује да су сингапурски наставници прилично отпорни на приступ повезивања историје математике и наставе математике, а неки наставници су чак забринути да би тај приступ могло лоше утицати на стицања основних математичких вештина ученика и способности решавања проблема. Многи наставници нису уочили потенцијале употребе историје математике у настави математике (Ho, 2008).

Кларк [Clark] сматра да будући наставници математике морају имати јасне примере како историја математике може да развије њихове математичке вештине. Потребни су примери како коришћење историје у настави математике омогућава будућим наставницима да дубље разумеју математику и да препознају улогу историје математике у развијању тог разумевања (Clark, 2011).

Башибујук [Basibüyük] и Сахин [Sahin] су користили студију случаја да утврде ставове наставника математике о историји математике. Узорак је чинио 21 наставник математике који су радили у различитим провинцијама у Турској. Испитаници су обично изјавили да су проучавајући историју математике акценат ставили на славне математичаре и настанак математике. Утврђено је да се осећају неадекватно у коришћењу историје математике, па је услед тога нису довољно укључили у своје часове. Неки испитаници су навели да не постоји довољна количина материјала која би им омогућила да користе историју математике (Basibüyük & Sahin, 2019).

Могућности примене „историје“ бројева у разредној настави математике

У овом делу рада предлажемо задатке који се могу користити у почетној настави математике. Сви предложени задаци се могу користити од првог до че-

твртог разреда само треба прилагодити бројеве у задатку блоку бројева који се у одговарајућем разреду изучавају. Предлажемо задатке дешифровања бројева и писања бројева у различитим бројевним системима, јер сматрамо да они могу да развију и логичко мишљење код ученика. Задаци се могу користити у редовној настави или на додатној настави. Поред оваквих задатака могу се користити и задаци са шиблицама приликом изучавања римског бројевног система. Пошто се такви задаци могу наћи у уџбеницима математике овде их изостављамо.

Примери задатака

А) У првом типу задатака симболе древних цивилизација треба превести у савремене индијско-арапске бројеве. На пример,

- 1) Број записан у бројевном систему Маја написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.

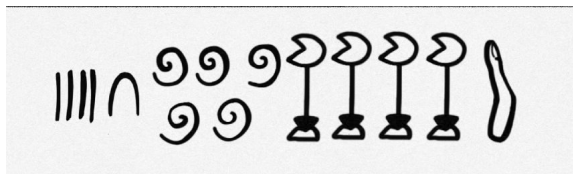


(Извор: https://commons.wikimedia.org/wiki/Maya_numbers?uselang=eo)

Решење: На Слици XVII је приказан број 10145, јер је

$$1 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 400 \cdot 5 + 8000 \cdot 1 = 5 + 140 + 2000 + 8000 = 10145.$$

- 2) Број записан у египатском хијероглифском бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.

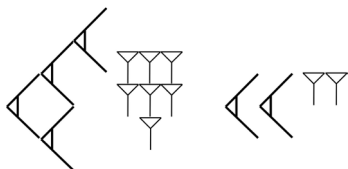


(Извор: <https://www.starmagichealing.com/what-are-egyptian-hieroglyphics/>)

Решење: На Слици XVIII су приказани 1 симбол за 10000, 4 симбола за 1000, 5 симбола за 100, један симбол за 10 и 4 симбола за 1, па је тражени број

$$1 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 14514.$$

- 3) Број записан у вавилонском бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.



(Извор: https://www.cemc.uwaterloo.ca/events/mathcircles/2017-18/Fall/Junior6_Oct17_Soln.pdf)

Решење: Тражени број је 2842, јер је

$$47 \cdot 60 + 22 \cdot 1 = 2820 + 2 = 2842.$$

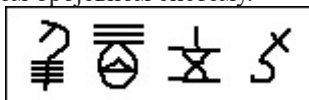
- 4) Број записан у ћириличном бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.



(Извор: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Slavic-numerals-1706.svg>)

Решење: Тражени број је 1706.

- 5) Број записан у кинеском бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.



(Извор: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/category-number-theory/>)

Решење: Тражени број је 4359.

- 6) Број записан у кинеском бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.



(Извор: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/category-number-theory/>)

Решење: На Слици XXII је приказан број 60390.

- 7) Број записан у грчком атичком бројевном систему написати у савременом индијско-арапском бројевном систему.

Χ Χ ΓΑ Η Η Η Η Δ Γ Ι Ι

(Извор: <https://tex.stackexchange.com/questions/210938/producing-attic-greek-numerals>)

Решење: Тражени број је 2857.

Б) У другом типу задатака број написан у савременом индијско-арапском бројевном систему треба написати у бројевном систему древних цивилизација. На пример,

- 1) Напиши број 3862 помоћу египатских хијероглифа.

Решење: Број 3862 написан помоћу египатских хијероглифа приказан је на Слици XXIV.



(Извор: http://www.primaryresources.co.uk/history/pdfs/egyptian_maths_problems.pdf)

- 2) Написати број 7118 у ћириличном бројевном систему.

Решење: Број 7118 написан у ћириличном бројевном систему приказан је на Слици XXV.

#ЗРНИ

(Извор: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyrillic_numerals-7118.svg)

Ц) На крају наводимо пример из свакодневног живота у коме долази до изражаја функционално знање:

Шејајући Сомбором Марина је на градској кући уочила једину изградње означену римском нумерацијом: MDCCCXLII. Које једине је изграђена градска кућа?

Аналогно приказаним, могу се осмислити и други примери задатака са елементима историје математике у разредној настави, чији садржај може заинтересовати ученике и стимулисати њихово мишљење. Историја математике обилује питањима, примерима и проблемима који се могу прилагодити савременој настави и постати директна подршка садржајима које треба обрадити, провеждати, продубити. Вешто састављени историјски примери и задаци могу имати велики значај и у математичком и у методичком смислу.

Закључак

Историја математике и њена открића могу имати значајну улогу у савременом математичком образовању. Еволуција бројевних система кроз историју којом је обухваћен и позициони бројевни систем, одвијала се паралелно са развојем људске свести. Савремени систем бројева су развили Индуси пре више од 2000 година, а крајњи облик је настао у VI веку. Предност индијско-арапског система је у томе што се „речи“ могу наглас прочитати, а изговорена верзија одржава нумеричку структуру коју чине јединице, умножене десетице, умножене стотине и тако даље. Друга предност је та што је такав систем погодан за извођење рачунских операција. Заједничка особина свих система који су еволуирали, мењали се и конвергирали индијско-арапском систему је да се у сваком од њих прва три броја означавају на исти начин, без обзира што визуелни утисак није исти. Број 1 се означава једном линијом, 2 помоћу два таква симбола постављена један до другог, 3 са три таква симбола (на пример, у атичком, римском, брахми и гупта бројевном систему користе се цртице, а Маје користе тачкице). Ти бројевни системи се тек од четврте цифре разликују. Иако се на први поглед арапски систем не уклапа у такву шему, заснован је на истом принципу нотације.

Бројна истраживања су потврдила значај примене историје математике у настави математике. „Праћење историјских промена у математици веома је значајно и за наставу математике. Многи проблеми у настави математике постају јаснији, ако се сагледају са историјског контекста“ (Дејић, 2021, стр. 14). Неке предности употребе историје математике у настави су: повећања мотивације ученика, изградња позитивног става према математици, ученици имају могућност да самостално истражују, смањење страха од математике.

С тим у вези, на темељу свеобухватне историјске генезе појма броја и бројевних система (*НОРМА XXVII*, 1/2022, I део), у раду су приказани примери задатака који се могу користити у почетној настави математике приликом обраде природних бројева. Препорука је да се историјске чињенице о развоју бројевних система и овакви задаци уврсте у наставу математике. У даљим истраживањима треба испитати ставове и мишљења ученика о оваквим задацима. Уколико ученици буду имали позитивно мишљење о оваквим садржајима, онда би требало радити и на укључивању одабраних садржаја историје математике у уџбенике математике и пратећу уџбеничку литературу, као и у математичке часописе намењене овој популацији ученика.

Литература

- Гордић, С., Лазић, Б. и Милошевић, М. (2022). Историјска генеза броја и бројевних система – могућности примене у почетној настави математике (I). *Норма*, XXVII(1), 85-98. doi: 10.5937/norma27-38116
- Дејић, М. (1990). *Тајни свет математике*. Београд: Полит.
- Дејић, М. (2013). Кратка историја броја. *Годишњак Училијског факултета у Врању*, IV, 67-85.
- Дејић, М. и Михајловић, А. (2015). Улога и значај историје математике у настави. *Годишњак Училијског факултета у Врању*, VI, 67-82.
- Дејић, М. (2021). Зора српске математике. У Н. Вуловић и А. Михајловић (Уред.), *Методички аспекти наставе математике IV* (стр. 13-28). Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу. doi: 10.46793/MANM4.013D
- Basibüyük, K., & Sahin, Ö. (2019). Mathematics Teachers' Opinion about the History of Mathematics. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 117-132. doi: 10.24193/adn.12.2.9
- Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 67-84. doi: 10.1007/s10649-011-9361-y
- Dejić, M., & Mihajlović, A. M. (2014). History of mathematics and teaching mathematics. *Inovacije u nastavi*, 27(3), 15-30. doi: 10.5937/inovacije1403015D
- Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1(3), 125-136. doi: <https://doi.org/10.30935/scimath/9392>
- Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *1st RICE, Singapore: Raffles Junior College*. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.459.5255&rep=rep1&type=pdf>
- Lazić, B., & Maričić, S. (2019). History of mathematics as a factor for increasing motivation in the mathematics. In S. Lawrence, A. Mihajlović, & O. Đokić (Eds.), *Proceedings of the Training Conference History of Mathematics in Mathematics Education* (pp. 72-78). Jagodina: Faculty of Education.
- Maričić, M. S., & Lazić, D. B. (2020). Abacus computing tool-from history to application in mathematical education. *Teaching Innovations*, XXXIII(1), 57-71. doi: 10.5937/inovacije2001057M
- Nataraj, M. S., & Thomas, M. O. J. (2009). Developing Understanding of Number System Structure from the History of Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 96-115. doi: 10.1007/BF03217547
- Salysers, G. D. (1954). The number system of the Mayas. *Mathematics Magazine*, 28(1), 44-48. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/category-number-theory/>

HISTORICAL GENESIS OF THE CONCEPT OF NUMBER AND NUMBER SYSTEMS - POSSIBILITIES OF APPLICATION IN THE INITIAL TEACHING OF MATHEMATICS (II)

Summary: The history of mathematics and its discoveries have a significant role in the modern teaching of mathematics because they increase the motivation and interest of students in the subject. This paper aims to consider the possibilities of its application in practice based on a brief overview of existing research on the use of the history of mathematics in mathematics teaching. Examples of tasks related to the history of natural numbers and number systems that can be applied in the initial teaching of mathematics are presented. In the conclusion of the paper, an overview of number systems through history is summarized (Part I, NORMA XXVII, 1/2022), with special reference to the importance of positional number system, i.e. the advantages of the Indo-Arabic system, with recommendations for introducing these contents in elementary mathematics.

Keywords: history of mathematics, number systems, tasks, class teaching of mathematics

