ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНЦИ
REVIEW PAPERS
ОБОЗОРНЫЕ СТАТЬИ

MOGUĆNOSTI PRIMENE FRAKCIONOG RAČUNA U MODELOVANJU TELEKOMUNIKACIONOG SAOBRAĆAJA

Branka D. Mikavica, *Aleksandra* M. Kostić-Ljubisavljević,
Vesna M. Radonjić-Đogatović
Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet
e-mail: b.mikavica@sf.bg.ac.rs, a.kostic@sf.bg.ac.rs,
v.radonjic@sf.bg.ac.rs

DOI: 10.5937/vojtehg63-6323

OBLAST: telekomunikacije
VRSTA ČLANKA: pregledni članak
JEZIK ČLANKA: srpski

Sažetak:

Frakcioni račun je oblast matematičke analize koja se bavi izučavanjem i primenom izvoda i integrala proizvoljnog reda. Ovom teorijom bavili su se mnogi poznati matematičari među kojima su Ojler, Riman, Liuvil, Abel i Furije. Predloženo je više definicija za izračunavanje izvoda i integrala necelog reda. U ovom radu daje se pregled nekih predloženih definicija, kao i osnovne postavke frakcionog računa sa posebnim naglaskom na mogućnostima njegove primene u domenu modelovanja telekomunikacionog saobraćaja.

Činjenica je da frakcioni račun poslednjih decenija nalazi sve veću primenu u raznim naučnim oblastima. Modeli zasnovani na frakcionom računu pokazali su se korisnim u fizici, mehanici, elektrotehnici, biohemiji, medicini, ekonomiji, teoriji verovatnoće. U ovom radu analizira se mogućnost primene frakcionog računa u modelovanju telekomunikacionog saobraćaja. Istraživanja pokazuju da se karakteristike telekomunikacionog saobraćaja na lokalnom i globalnom nivou u mreži, kao što su samosličnost i zavisnost u dugom opsegu, efikasnije mogu opisati pomoću frakcionog računa umesto konvencionalnih stohastičkih procesa. U radu su prikazani predloženi modeli zasnovani na frakcionom računu koji modeluju fenomene prisutne u savremenim telekomunikacionim mrežama.

Ključne reči: *modeli, saobraćaj, telekomunikacije, frakcioni račun.*

ZAHVALNICA: Ovaj rad je deo rezultata istraživanja na projektu „TR32025" koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke I tehnološkog razvoja Republike Srbije

Uvod

Telekomunikacione mreže beleže enorman razvoj. Potrebe korisnika u pogledu novih servisa i aplikacija koje zahtevaju veće propusne opsege i veći kvalitet servisa svakim danom rastu. Rast tražnje utiče na neophodnost izgradnje adekvatne arhitekture mreže, planiranje, održavanje, kontinuirani razvoj i unapređivanje. U tom smislu, od velikog značaja je evaluacija efikasnosti telekomunikacionih mreža korišćenjem metoda merenja, analize i simulacije ovih mreža. Merenjem i statističkom analizom telekomunikacionog saobraćaja otkriveno je da saobraćaj u mreži pokazuje velike neregularnosti (*burstiness*), kako u pogledu varijabilnosti intenziteta saobraćaja, tako i u pogledu oblika funkcije autokorelacije. Uočeno je da saobraćaj ima fraktalne karakteristike – samosličnost i zavisnost u dugom opsegu (Devetskiotis, da Fonseca, 2005).

Usled toga, potrebna je velika širina propusnog opsega, a vrlo često je to jedan od uzroka neefikasnosti mreže. Za razliku od ustaljenih modela, zasnovanih na Poasonovoj raspodeli, koji se sreću u mrežama sa komutacijom kola, kod modela zasnovanih na samosličnosti telekomunikacionog saobraćaja javljaju se problemi koje je teško prognozirati, izmeriti i kontrolisati saobraćaj u mreži. Stoga, merenje, analiza i modelovanje samosličnog telekomunikacionog saobraćaja još uvek predstavlja izazov.

Različita istraživanja su pokazala da se saobraćaj u savremenim telekomunikacionim mrežama može adekvatno opisati statističkim modelima zasnovanim na frakcionom računu. Frakcioni račun predstavlja oblast matematike koja se bavi izučavanjem i primenom izvoda i integrala necelog reda. Poslednjih decenija nalazi sve veću primenu u raznim sferama nauke, od medicine, fizike, biohemije, ekonomije, teorije verovatnoće, mehanike, elektrotehnike.

Težište ovog rada je na mogućnosti primene frakcionog računa u savremenim telekomunikacionim mrežama u modelovanju telekomunikacionog saobraćaja.

Rad je koncipiran na sledeći način. Nakon uvodnog razmatranja, daju se osnovne postavke frakcionog računa. Brojni poznati matematičari koji su se bavili izučavanjem frakcionog računa dali su svoje definicije i u ovom radu se daje pregled nekih od predloženih definicija. U narednom poglavlju se opisuju fenomeni koji se sreću u savremenim telekomunikacionim mrežama – samosličnost (eng. *self-similarity*) i zavisnost u dugom opsegu (eng. *Long run dependence - LRD*). Zatim se daje pregled nekih predloženih modela saobraćaja zasnovanih na frakcionom računu. Na kraju se daju zaključna razmatranja.

Osnovne postavke frakcionog računa

Izučavanje frakcionog računa počinje u 17. veku sa Lopitalom i Lajbnicom. Lakroa je prvi objavio neceli red izvoda. Tako, za $y = x^a$, $a \in R_+$, pokazao je da

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1/2)} x^{a-1/2}.$$

Zapravo, dobio je da $(d/dx)^{1/2} x = 2\sqrt{x/\pi}$ (isti rezultat je dobio i Riman-Liuvil, koji važi i danas).

Iako je naziv „frakcioni račun” zapravo pogrešan, a oznaka „integracija i diferencijacija proizvoljnog reda” adekvatnija, uobičajen je naziv frakcioni račun, koji se koristi još od doba Lopitala.

Furije, koji je 1822. izveo vrednost integrala funkcije

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R f(\alpha)\, d\alpha \int_R \cos p(x-\alpha)\, dp$, formalno je izrazio verziju sa izvodima

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R f(x) dx \int_R p^\nu \cos\left\{p(x-\alpha) + \frac{\nu\pi}{2}\right\} dp ,$$

gde se vrednost ν odnosi na bilo koju vrednost, pozitivnu ili negativnu.

Abel je primenio frakcioni račun za rešavanje integralne jednačine koja se javlja u formulaciji tautohronog problema (odrediti oblik krive tako da je vreme spuštanja tela zanemarljive mase niz datu krivu, bez trenja, pod uticajem gravitacije, nezavisno od početnog položaja tela). Abelova integralna jednačina ima oblik:

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)\, dt . \tag{1}$$

Abel je izučavao opštije forme integralnih jednačina sa jezgrom oblika $(x-t)^\alpha$. Integral (1), sa izuzetkom faktora $1/\Gamma(1/2)$, poseban je slučaj konačnog integrala koji definiše frakciono integraljenje reda ½. U integralnim jednačinama oblika (1) funkcija *f* je nepoznata. Abel je desnu stranu jednačine (1) napisao kao $\sqrt{\pi}\left[d^{-1/2}/dx^{-1/2}\right] f(x)$. Zatim je primenio operaciju $d^{1/2}/dx^{1/2}$ na obe strane jednačine i dobio je:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x), \tag{2}$$

jer ovi frakcioni operatori imaju osobinu da $D^{1/2}D^{-1/2}f = D^0 f = f$. Stoga, kada se izračuna frakcioni izvod reda ½ konstante *k* u (2), $f(x)$ je određena. To je izuzetno dostignuće u oblasti frakcionog računa. Važno je uočiti da frakcioni izvod konstante nije uvek jednak nuli (Miller, Ross, 1993).

Prvi ozbiljan pokušaj da se dâ logična definicija frakcionih izvoda pripada Liuvilu. Liuvil je pošao od poznatog rezultata $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ gde je $D = \frac{d}{dx}, n \in N$, i proširio ga, najpre na poseban slučaj kada je $\nu = \frac{1}{2}, a = 2$ a zatim ga proširio na proizvoljan red, $\nu \in R_+$ sa $D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}$. Prikazao je funkciju $f(x)$ kao $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ i definisao izvod proizvoljnog reda ν sa $D^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\nu e^{a_k x}$.

Njegov drugi metod odnosio se na eksplicitnu funkciju x^{-a}. Posmatrao je integral $I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du$, a zatim zamenom $xu = t$ dobio rezultat $I = x^{-a}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt = x^{-a}\Gamma(a)$ (za Rea > 0). Množeći obe strane $x^{-a} = I/\Gamma(a)$ sa D^ν dobio je $D^\nu x^{-a} = (-1)^\nu \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}$.

S obzirom na to da proizvoljna diferencijalna jednačina oblika $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ *n*-tog reda ima opšte rešenje $y = c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1}x$, Liuvil je zaključio da frakciona jednačina oblika $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = 0, \alpha \in R_+$ takođe treba da ima odgovarajuće opšte rešenje.

Neka je *f* lokalno integrabilna u intervalu (a,∞), tada je *n*-ta iteracija integraljenja data kao:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^n f(x) := \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-1}} f(u_n)du_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-u)^{n-1} f(u)du $$

Mikavica, B. i dr., Mogućnosti primene frakcionog računa u modelovanju telekomunikacionog saobraćaja, pp. 64–86

za skoro svako *x* uz $-\infty \le a < x < \infty$ i $n \in N$. Ako se uzme da je $(n-1)! = \Gamma(n)$, dobija se neposredna generalizacija integrala funkcije *f* necelog reda $\alpha > 0$,

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du \text{ , (desni integral)} \tag{3} $$

i slično za $-\infty < x < b \le \infty$,

$$ {}_x\mathrm{I}_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (u-x)^{\alpha-1} f(u) du \text{ (levi integral),} $$

oboje definisano za odgovarajuće *f*. Indeksi uz *I* označavaju granice integracije u datom redosledu. Može se uočiti da je za $\alpha = n$ jednačina (3) jedinstveno rešenje početnog problema

$$ y^{(n)}(x) = f(x), y(a) = y'(a) = ... = y^{(n-1)}(a) = 0 $$

Kada je $a = -\infty$ jednačina (3) je ekvivalentna Liuvilovoj definiciji, a za $a = 0$ dobija se Rimanova definicija (bez komplementarne funkcije). Najčešće se kaže da je ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f$ Riman-Liuvilov frakcioni integral reda α funkcije *f*. Sa druge stane, jednačine

$$ {}_xW_{\infty}^{\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_{\infty}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (u-x)^{\alpha-1} f(u) du $$

$$ {}_{-\infty}W_x^{\alpha} f(x) = {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{\alpha-1} f(u) du $$

nazivaju se Vejlovi frakcioni integrali reda α, definisani za odgovarajuću funkciju *f*. Levi i desni integral frakcionih integrala ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x)$ i ${}_x\mathrm{I}_b^{\alpha} f(x)$ povezani su preko Parsevalove jednakosti (frakciona integracija po delovima) koja se dobija za $a = 0$ i $b = \infty$:

$$ \int_0^{\infty} f(x) \left({}_0\mathrm{I}_x^{\alpha} g \right)(x) dx = \int_0^{\infty} \left(W_{\infty}^{\alpha} f \right)(x) g(x) dx $$

Sledeća svojstva važe za desni integral frakcionih integrala (uvođenjem adekvatnih zamena važi slučaj levog integrala). Neka je $f \in L_{loc}^1(a,\infty)$. Tada, ako je $a > \infty$, ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x)$ je konačan svuda u intervalu (a,∞) i pripada $L_{loc}^1(a,\infty)$. Ako je $a = -\infty$ pretpostavlja se da se *f* ponaša tako da za $-\infty$ takav integral konvergira. Pod ovim pretpostavkama frakcioni integral zadovoljava svojstvo aditivnosti:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\,{}_a\mathrm{I}_x^{\beta} = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha+\beta} f\left(\alpha,\beta>0\right). $$

Uzimajući u obzir redosled integraljenja, dobija se:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\,{}_a\mathrm{I}_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}du \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^u (u-t)^{\beta-1} f(t)\,dt $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\,dt \int_t^x (x-u)^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}du $$

Drugi integral je, uvodeći zamenu $y=\dfrac{u-t}{x-t}$, jednak

$$ (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}dy = \mathrm{B}(\alpha,\beta)(x-t)^{\alpha+\beta-1} $$

$$ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-t)^{\alpha+\beta-1} $$

gde je $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ Beta funkcija. Kada se to uvrsti u gornje rezultate, dobija se:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f = {}_a\mathrm{I}_x^{n}\,{}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f\left(n\in N,\alpha>0\right), $$

što implicira *n*-tu diferencijaciju:

$$ \frac{d^n}{dx^n}\,{}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x),\ \left(n\in N,\alpha>0\right) \text{ za svako } x. \tag{4} $$

Prethodni rezultati važe i za kompleksni parametar α, ako se uslov $\alpha>0$ zameni sa $\mathrm{Re}\,\alpha>0$. Tada se operacija ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}$ može smatrati holomorfnom funkcijom od α za $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, što se može proširiti na celu kompleksnu ravan. Kako bi se ovo pojasnilo, polazi se od pretpostavke da je *f* beskonačno diferencijabilna u skupu realnih brojeva. Ako je $a>-\infty$ tada je $f^{(n)}(a)=0$ za $n=0,1,2...$ Tada za svako fiksno $x>a$ integral u (9) je holomorfna funkcija od x za $\mathrm{Re}\,\alpha>0$.

Neka je $x\in R$ i $r>0$. Skup

$$ \mathrm{K}(x,r) = \left\{y\in R : d(x,y)<r\right\} = \left\{y\in R : \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} < r\right\} $$

Mikavica, B. i dr., Mogućnosti primene frakcionog računa u modelovanju telekomunikacionog saobraćaja, pp. 64–86

naziva se otvorena kugla oko x radijusa r. Skup $A \subseteq R$ je otvoren ako važi $\forall x \in A, \exists r > 0, \mathrm{K}(x,r) \leq A$. Funkcija *f* je diferencijabilna ili holomorfna na otvorenom skupu Ω ako poseduje izvod u svakoj tački skupa Ω. Važi sledeće: ako je funkcija diferencijabilna, onda postoji izvod svakog reda na celom skupu Ω. Takva diferencijabilna funkcija naziva se holomorfna.

Parcijalna integracija *n*-puta daje:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f^{(n)}(x), \ (\mathrm{Re}\,\alpha > 0, n \in N) \tag{5}$$

Primenjujući aditivno svojstvo (4) na izraz sa desne strane (5) i diferencirajući rezultat *n*-puta po *x*, dobija se:

$$ \frac{d^n}{dx^n} {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f^{(n)}(x), \ (\mathrm{Re}\,\alpha > 0, n \in N) \tag{6}$$

čime se pokazuje da su operacije integracije frakcionog reda α i diferenciranja reda *n* nad funkcijom *f* komutativne.

Ako se ponovo pogleda formula (5) može se uočiti da je desna strana izraza holomorfna funkcija od α sa većim domenom $\{\alpha \in C; \mathrm{Re}\,\alpha > -n\}$ i jednak je $\frac{d^n}{dx^n} {}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f(x)$ po formuli (6). Ovako se može proširiti ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x)$ na domen $\{\alpha \in C; \mathrm{Re}\,\alpha \leq 0\}$, analitički definišući za $\alpha \in C$ i $\mathrm{Re}\,\alpha \leq 0$

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} {}_a\mathrm{I}_x^{n+\alpha} f(x) \tag{7}$$

Za svaki ceo broj $n > -\mathrm{Re}\,\alpha$, dobija se

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{0} f(x) = f(x), {}_a\mathrm{I}_x^{-n} f(x) = f^{(n)}(x), \ (n \in N) \tag{8}$$

Neka je α kompleksni broj takav da je $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ i $n = [\mathrm{Re}\,\alpha]$, gde $[\mathrm{Re}\,\alpha]$ označava ceo deo od $\mathrm{Re}\,\alpha$. Desni integral frakcionog izvoda reda α definisan je kao

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} {}_a\mathrm{I}_x^{n-\alpha} f(x), \ (n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1) \tag{9}$$

za svako $f \in L_{loc}^1(a,\infty)$ za koje izraz na desnoj strani važi.

Definicije integrala i izvoda proizvoljnog reda α, $\mathrm{Re}\,\alpha \neq 0$, (ekvivalentno) mogu se objediniti na sledeći način, za $(n \in N)$:

$$
{}_aD_x^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_{\alpha}^{x} (x-u)^{-\alpha-1} f(u)\,du, (\mathrm{Re}\,\alpha < 0) \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n {}_a\mathrm{I}_x^{n-\alpha} f(x), (\mathrm{Re}\,\alpha > 0; n-1 \le \mathrm{Re}\,\alpha < n) \end{cases},
$$

što se često naziva *diferintegral* funkcije *f* reda α. Ovaj proces često se naziva i frakciono integro-diferenciranje.

Može se uočiti da je levi izraz frakcionog izvoda reda α definisan kao: ${}_xD_b^{\alpha} f(x) = (-1)\dfrac{d^n}{dx^n}\, {}_x\mathrm{I}_b^{n-\alpha} f(x)$, $(n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1)$.

Frakcioni izvod potpuno imaginarnog reda $\alpha = i\theta, \theta \neq 0$ definisan je kao

$$
{}_aD_x^{i\theta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} = \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{i\theta}}\,du,
$$

a odgovarajući integral reda $\alpha = i\theta$ definiše se kao:

$$
{}_a\mathrm{I}_x^{i\theta} f(x) = \frac{d}{dx}\, {}_a\mathrm{I}_x^{1+i\theta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-u)^{i\theta} f(u)\,du
.$$

Definicija frakcionog integro-diferenciranja za svako $a \in C$ je kompletna uvođenjem identičkog operatora ${}_aD_x^0 f := {}_a\mathrm{I}_x^0 f = f$ za svako $\alpha = 0$.

Takođe, može se uočiti da su frakcioni operatori linearni:

$$
{}_aD_x^{\alpha}\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] = c_1\, {}_aD_x^{\alpha} f_1(x) + c_2\, {}_aD_x^{\alpha} f_2(x),
$$

gde su c_1 i c_2 konstante.

Pri definisanju dovoljnih uslova za postojanje frakcionih izvoda u relaciji (9) razmatra se slučaj $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$, ako je $\alpha > -\infty$ (Hifler, 2000). Pretpostavlja se da je *f* neprekidna u konačnom intervalu $[a,b]$, formalno $f \in AC[a,b]$, što znači da je *f* diferencijabilna svuda u intervalu (a,b) i $f' \in L^1(a,b)$ i u intervalu $[a,b]$ jednaka je $f(x) = \int_a^x f'(u)\,du + f(a) = {}_a\mathrm{I}_x^1 f'(x) + f(a)$.

Zamenom ovoga u formuli ${}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha} f(x)$, uz činjenicu da su operatori $\mathrm{I}^{1-\alpha}$ i I^1 komutativni, dobija se:

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^1 \, {}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha} f'(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-\alpha)^{1-\alpha} . $$

Diferenciranjem po *x*, dobija se:

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} {}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha} f(x) = {}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha} f'(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \tag{10} $$

što pokazuje da, u opštem slučaju, operatori ${}_a\mathrm{I}_x^{1-\alpha}$ i $\frac{d}{dx}$ nisu komutativni.

Formula (10) može se proširiti uvođenjem kompleksnog broja α, takvog da je $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 1$. Rezultati su obuhvaćeni pretpostavkom koja sledi. Najpre se uvode sledeće oznake: za $n \in N$, $AC^{n-1}[a,b]$ označava skup od $(n-1)$ diferencijabilnih funkcija *f* na $[a,b]$, takvih da su $f, f', ..., f^{n-1}$ neprekidne na $[a,b]$. Može se uočiti da je $AC^0[a,b]$ jednako $AC[a,b]$.

Pretpostavka: ako je $f \in AC[a,b]$ *f* je definisana samo u konačnom intervalu $[a,b]$, tada postoji ${}_aD_x^\alpha f$, ${}_xD_b^\alpha f$ za $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$. Štaviše, ${}_aD_x^\alpha f \in L^r(a,b)$ za $1 \leq r < \frac{1}{\mathrm{Re}\,\alpha}$ i ${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(u)}{(x-u)^\alpha}du\right\}$.

Analogno važi za ${}_xD_b^\alpha f$.

Ako je $f \in AC^{n-1}[a,b]$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha]+1$ tada postoji ${}_xD_a^\alpha f$ za $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 0$ i važi

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{\alpha-n+1}}du \tag{11} $$

Drugi način da se definiše frakcioni izvod reda α, takođe prema Liuvilu, jeste:

$$ {}_a\bar{D}_x^\alpha f(x) := {}_a\mathrm{I}_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x), \ (n = [\mathrm{Re}\,\alpha]+1). \tag{12} $$

Očigledno, *f* mora biti diferencijabilna kako bi izraz sa desne strane (12) postojao. Relacija između dva frakciona izvoda (9) i (12) data je formulom (11), naime

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_a\bar{D}_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} . $$

Definicija (9) najčešće je korišćena u matematičkim krugovima, dok je definicija (12) češće korišćena u slučajevima kada su početni uslovi definisani preko celih izvoda (Hifler, 2000).

Neki predloženi modeli primene frakcionog računa za modelovanje telekomunikacionog saobraćaja

Izvodi i integrali celog reda imaju jasnu fizičku i geometrijsku interpretaciju. Međutim, prihvatljiva geometrijska i fizička interpretacija integraljenja i diferenciranja frakcionog reda dugo nije bila poznata. To je oblast koja se danas sve više razvija, kako u teoriji, tako i u praksi. Poslednjih godina frakcioni račun nalazi primenu u studijama o viskoelastičnim materijalima, tokovima fluida, elektromagnetnoj teoriji i verovatnoći, saobraćaju i medicini (Dalir, Bashour, 2010). U ovom delu rada težište je na mogućnosti primene u telekomunikacionim mrežama

Modeli Markova i njegova teorija redova često su izučavani i intenzivno primenjivani kao alat za evaluaciju performansi. Međutim, analize zasnovane na modelima Markova imaju određene nedostatke. To su:

– u mrežama sa velikim protocima verovatnoća odbacivanja paketa u baferima sa ograničenim kapacitetom teško se može odrediti i često se aproksimira verovatnoćom odbacivanja u sistemu sa beskonačnim baferima (Kim, Shroff, 2001),

– kada se multipleksira veliki broj izvora Markova, veliki kapacitet agregatnih dolaznih procesa rezultira nemogućnošću izračunavanja,

– *end-to-end* analiza performansi zahteva precizno modelovanje odlaznih procesa iz redova za analizu sledećeg hopa (modelovanje odlaznih procesa za Markove izvore takođe je veliki problem),

– sveobuhvatna merenja i analize saobraćaja u mreži ukazuju na to da paketski saobraćaj ima svojstva samosličnosti ili zavisnosti u dugom opsegu (LRD), koja se ne mogu opisati modelima Markova koje karakteriše zavisnost u kratkom opsegu (Cheng et al, 2007).

Samosličnost podrazumeva da je određeno svojstvo objekta, poddomen nekog dinamičkog sistema ili vremenska serija, očuvano u odnosu na vremensko i/ili prostorno skaliranje. Ako je objekat samosličan ili fraktalan, njegovi delovi, kada se uvećaju, u određenom smislu imaju oblik celine. Deterministička samosličnost podrazumeva samo jaku formu rekurzivne regularnosti. Međutim, za potrebe modelovanja saobraćaja, gde je stohastička varijabilnost osnovna karakteristika, deterministička samosličnost mora se dalje uopštiti. Za razliku od determinističkih fraktala, stohastički fraktali ne poseduju egzaktnu sličnost njihovih delova u poređenju sa celinom. Mera sličnosti je oblik grafa sa adekvatno izabranim stepenom sličnosti. Ako se usvoji da su vremenske serije u saobraćaju uzorci stohastičkog procesa, pri čemu se zanemaruje mera sličnosti fokusiranjem na određene statistike ili, recimo, reskaliranjem vremenskih serija, tada je moguće postići egzaktnu sličnost objekata.

Statistike drugog reda su statistička svojstva koja prikazuju *burstiness* ili varijabilnost. Oblik autokorelacione funkcije ima značajnu ulogu. Autokorelaciona funkcija je kriterijum u odnosu na koji se definiše invarijantnost. Korelacija, kao funkcija kašnjenja, opada znatno sporije u odnosu na eksponencijalnu. Postojanje ovakve zavisnosti naziva se zavisnost u dugom opsegu (Park, Willinger, 2001).

Zavisnost u dugom opsegu je svojstvo vremenskih serija da pokazuju jaku zavisnost tokom velikih vremenskih intervala. Formalno se može izraziti na više ekvivalentnih načina. Neka je $X_t, t \in Z$ diskretna promenljiva stacionarne serije. Serija $X_t, t \in Z$ se naziva „*long range dependence*" (LRD), ako za njenu funkciju kovarijanse važi

$$\gamma(t) = E\left(X_0 - EX_0\right)\left(X_t - EX_t\right) \sim c_\gamma |t|^{2-2H}, t \to \infty \tag{13}$$

i važi $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ gde je c_γ konstanta veća od 0. Uslov (13) može se ekvivalentno napisati pomoću Furijeove transformacije kao:

$$f(\lambda) \sim c_f |\lambda|^{2H-1}, \lambda \to 0 ,$$

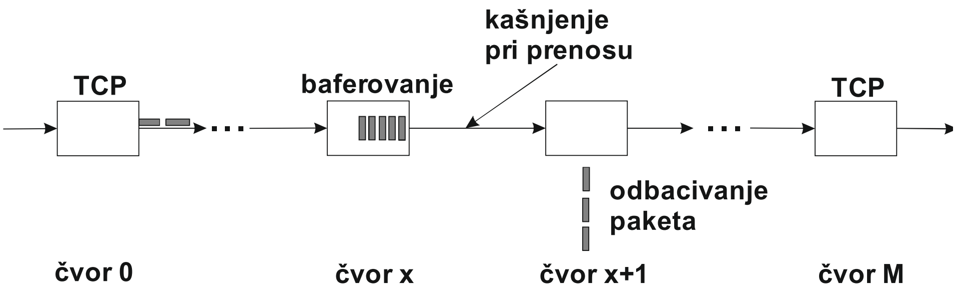
gde je $f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_p e^{-i\lambda p} \gamma(p), \lambda \in [-\pi, \pi]$ funkcija spektralne gustine X_t i c_f je konstanta veća od 0. Parametar H naziva se Hurstov parametar. Što je H veće, vremenska zavisnost je veća, jer funkcija kovarijanse sporije opada ka beskonačnosti (Park et al, 2011).

Postoje različite teorije o uzroku pojave samosličnosti. Po prvoj, uzrok samosličnosti leži u aplikativnom sloju. Druga teorija tvrdi da je poreklo samosličnosti na transportnom sloju. U ovoj teoriji posmatraju se efekti primene TCP algoritama kontrole zagušenja na saobraćaj u mreži, kao i situacija koja nastaje kada više izvora saobraćaja rutira saobraćaj preko istih putanja. Treća teorija razmatra uzroke na mrežnom sloju. Ova teorija, pre svega, povezuje samosličnost sa kritičnim fenomenima koji nastaju u tačkama u kojima slobodan tok saobraćaja prerasta u zagušenje (Smith, 2011).

U nastavku će biti prikazan predloženi model koji predstavlja telekomunikacioni saobraćaj kao stohastički proces sa mogućnošću beskonačnog srednjeg kašnjenja. Ovim modelom može se objasniti pojava zavisnosti u dugom opsegu i fraktalnih osobina tokova podataka. Takođe, prikazana je formalna veza između *heavy-tailed* raspodela kašnjenja, hiperboličkog opadanja kašnjenja paketa, funkcije autokovarijanse i frakcionih izvoda.

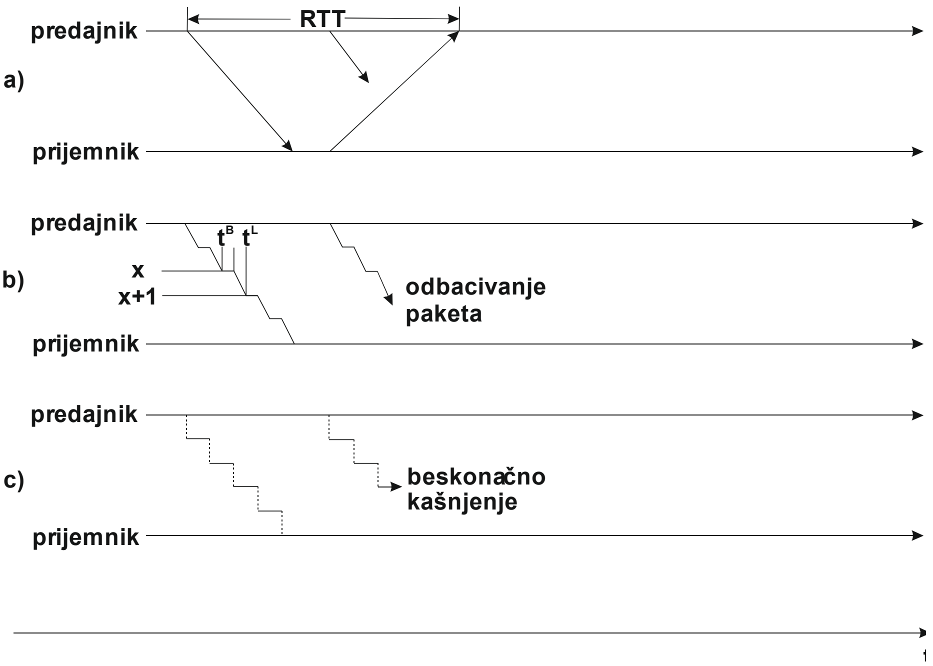
Nedavna merenja telekomunikacionog saobraćaja pokazala su da se njegove karakteristike efikasnije mogu opisati pomoću necelih izvoda umesto konvencionalnih stohastičkih procesa (Zaborovsky et al, http://www.neva.ru/conf/art/art8.html). Nova interpretacija frakcionog računa otvara nova područja upotrebe ovih razvijenih matematičkih alata radi razumevanja lokalnih i globalnih karakteristika saobraćaja u mrežama sa komutacijom paketa.

Fraktalna dimenzija i zavisnost u dugom opsegu mogu se uočiti u privatnim, lokalnim i WAN mrežama. Definisanje kvaliteta servisa (QoS) za Internet servise zahteva adekvatne modele virtuelnih konekcija, u zavisnosti od tokova podataka. U opštem slučaju, takva konekcija se sastoji od nekoliko tranzitnih čvorova i linkova. Bez smanjenja opštosti pretpostavlja se da se na konekciji koja se razmatra primenjuje TCP protokol i da postoji *end-to-end* kontrola. Pored toga, pri definisanju modela tokova podataka razmatraju se procesi u tranzitnim čvorovima i komunikacionim linkovima, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1 – Kašnjenje/odbacivanje paketa u TCP konekciji
Figure 1 – Packet delay/dropp processes in a TCP connection
Схема 1 – Задержка/потеря пакетов в TCP соединении

Ovi procesi javljaju se u različitim oblicima kašnjenja paketa i akcijama njihovog odbacivanja. Posmatra se vreme propagacije paketa. Detaljnom elaboracijom sve do nivoa tranzitnih čvorova (slika 2b) vreme propagacije T može se predstaviti kao suma kašnjenja paketa u svakom hopu, $T = \sum^{M} \left(t_i^L + t_i^B \right)$, gde je t_i^L vreme propagacije paketa između čvorova x i $x+1$ (kašnjenja duž linka), t_i^B kašnjenje procesiranja/ baferovanja paketa u čvoru x, M je ukupan broj čvorova u konekciji.



Slika 2 – Prenos paketa: a) end-to-end model; b) čvor-čvor model; c) skok model
Figure 2 – Packet transmission: a) end-to-end model; b) node-node model; c) jump model
Схема 2 – Передача пакета: а) модель end-to-end б) модель узел-узел с) модель прыжка

U savremenim TCP/IP mrežama kašnjenje duž linka t^L u datoj virtuelnoj konekciji može se smatrati konstantnim (Hifler, 2000). Stoga, varijacija vremena propagacije, što ima izuzetan uticaj na parametre kvaliteta servisa, uzrokovana je varijacijama kašnjenja baferovanja t^B.

Paket se može odbaciti usled popunjenosti bafera ili greške pri rutiranju u tranzitnim čvorovima. Sa aspekta prijemnika tranzitni čvor se ponaša kao „zamka" za pakete i zadržava ih zauvek. U ovom slučaju, t^B uzima vrednost beskonačno. Može se uočiti da će uprkos gubitka paketa ili beskonačnog kašnjenja protokol na transportnom sloju osigurati prenos određenih paketa koristeći retransmisiju. Rezultat toga je porast ukupnog broja prosleđenih paketa i, stoga, utiče na efektivnu produktivnost virtuelne konekcije.

Virtuelni kanal određen je konačnim brojem tranzitnih čvorova x_i i linkova. Svaki tranzitni čvor karakteriše se prosečnim vremenom prenosa paketa do sledećeg čvora. Promenljiva t uključuje kašnjenje paketa u baferu i vreme propagacije paketa do sledećeg čvora. U ovom slučaju se prenos paketa između tranzitnih čvorova može predstaviti kao sekvenca diskretnih prostornih „skokova" duž linkova (slika 2c). Vremenski interval između „skokova" je slučajna promenljiva koja je jednaka vremenu prenosa paketa do sledećeg čvora. Takvi „skokovi" formiraju statistički dinamički proces komutacije paketa i direktno utiču na karakteristike saobraćaja u mreži.

Za definisanje matematičkog modela takvog procesa uvodi se funkcija gustine raspodele verovatnoće *f(t)* prenosa paketa od čvora *x* do čvora *x+1*. Pretpostavlja se da svi tranzitni čvorovi u virtuelnom kanalu imaju ista prava u njihovom doprinosu vrednosti *end-to-end* vremena prenosa. Mogućnost odbacivanja paketa odgovara stanju u kojem paket ne napušta tranzitni čvor *x* i ostaje u ovom čvoru zauvek. Tada srednje kašnjenje paketa u čvoru zadovoljava uslov

$$< t >= \int_0^\infty t f(t)\, dt = \infty ,$$

$$f(t) > 0, \int_0^\infty f(t) dt = 1 .$$

Odgovarajući izraz za *f(t)* može se napisati kao:

$$f(t) = \frac{\gamma}{(1+t)^{\gamma+1}}, 0 < \gamma < 1 .$$

Zaključuje se da upravo ovakva stuktura funkcije gustine verovatnoće karakteriše dugoročnu statističku zavisnost, koja je detaljno analizirana u računarskim mrežama (Babic et al, 1998). Za dalju konstrukciju modela uvodi se funkcija $F(\tau)$,

$$F(\tau) = 1 - \int_0^\tau f(t) dt = \frac{1}{(1+\tau)^\gamma} ,$$

gde je τ vreme postojanja paketa u tranzitnom čvoru *x* virtuelnog kanala.

Odredimo sada najverovatniji broj paketa u čvoru *x* u trenutku *t,* koristeći formulu:

$$n(x;t) = \int_0^t n(x-1;t-\tau) f(\tau) d\tau + n_0(x) F(t) ,$$

gde je $n_0(x)$ broj paketa u čvoru *x* pre pristizanja paketa iz čvora *x-1*.

Vrednost *n(x)* nije ograničena veličinom bafera i može uključiti sve pakete u virtuelnom kanalu koji se prosleđuju i odbacuju u čvoru *x*.

Koristeći ove oznake, jednačina prosleđivanja paketa može se prikazati kao:

$$\Gamma(1-\gamma) D_t^\gamma \left[n(x;t) \right] = -\frac{\partial n(x;t)}{\partial x} + \frac{n_0(x)}{t^\gamma} ,$$

Mikavica, B. i dr., Mogućnosti primene frakcionog računa u modelovanju telekomunikacionog saobraćaja, pp. 64–86

gde levi deo jednačine predstavlja frakcioni izvod funkcije *n(x;t)* sa eksponentom γ,

$$D_t^{\gamma}\left[n(x;t)\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t \frac{n(x;\tau)}{(t-\tau)^{\gamma}}d\tau .$$

Uzimajući u obzir da promenljiva *x* uzima diskretne vrednosti, prethodna jednačina rešava se uz početne uslove: $n_0(0)=n_0$ i $n_0(k)=0, k=1,2,...$ Tako se dobija

$$n(k;t)=n_0\left\{\frac{1}{t^{\gamma}}-k\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)t^{2\gamma}}-k\Gamma(1-\gamma)\cdot\frac{1}{\Gamma(-\gamma)t^{\gamma+1}}\right\},$$

ili

$$n(k;t)=n_0\left\{\frac{1}{t^{\gamma}}-k\left[\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)}\cdot\frac{1}{t^{2\gamma}}+\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(-\gamma)}\cdot\frac{1}{t^{\gamma+1}}\right]\right\}.$$

Uzimajući u obzir asimptotska svojstva ovog rešenja, moguće je napisati $n(0;t)=n_0\left\{\frac{1}{t^{\gamma}}\right\}$.

Za $k=1$ važi sledeći izraz

$$n(1;t)=n_0\left\{\frac{1}{t^{\gamma}}-\left[\frac{\Gamma^2(1-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)}\cdot\frac{1}{t^{2\gamma}}+\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(-\gamma)}\cdot\frac{1}{t^{\gamma+1}}\right]\right\}.$$

Stoga se izračunavanje može nastaviti za svako *k*. Ovaj pristup omogućava izračunavanje korelacione funkcije.

Za početne uslove $n(0;t)=n_0\delta(t)$ moguće je napisati:

$$c(m;t)=\Gamma(1-\gamma)\left[\frac{1}{\Gamma(1-2\gamma+1)}\cdot\frac{1}{t^{2\gamma-1}}-m\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma+1)}\cdot\frac{1}{t^{3\gamma-1}}\right]$$

$$=n_0^2\Gamma(1-\gamma)t^{1-2\gamma}\left[\frac{1}{\Gamma(2-2\gamma)}-m\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-3\gamma)}\cdot\frac{1}{t^{\gamma}}\right]$$

Ovaj izraz pokazuje da korelaciona funkcija hiperbolično opada sa promenom *t*. Zato, pod uslovom da je $\gamma<1$, takvi procesi pokazuju svojstva koja se opisuju frakcionim računom. Sa $m=0$ izraz za varijansu glasi:

$$D(t)=c(0;t)=\frac{n_0\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma)}t^{1-2\gamma},$$

što je karakteristično za procese sa zavisnošću u dugom opsegu i asimptotskom osobinom samosličnosti drugog reda.

Stoga, karakeristike telekomunikacionog saobraćaja, koje su dosta izučavane u modernoj literaturi, mogu se direktno dovesti u vezu sa metodama komutacije paketa, koje se koriste u računarskim mrežama. Proces prenosa paketa može se opisati jednačinama čija se rešenja dobijaju alatima frakcionog računa. Koristeći vremenska asimptotska rešenja, diferencijalne jednačine sa frakcionim izvodima mogu se formulisati tako da se mogu dobiti rešenja drugog reda za statističke momente procesa. Specifičnost ove karakteristike saobraćaja jeste da njena korelaciona funkcija hiperbolično opada, što se mora uzeti u obzir pri definisanju metoda za kontrolu saobraćaja (Zaborovsky et al, http://www.neva.ru/conf/art/art8.html).

Modelovanje telekomunikacionog saobraćaja frakcionom analizom – mogućnosti i nedostaci

Empirijska istraživanja telekomunikacionog saobraćaja pokazala su invarijantna fraktalna svojstva saobraćaja koja imaju značajnu ulogu u kontekstu analize kvaliteta servisa. U IP telefoniji i video *streaming*-u prenos paketa mnogo zavisi od algoritama zasnovanih na modelima saobraćaja. Osnovni problem u dizajnu takvih modela jeste da se stvore uslovi pod kojima je moguća kontrola garantovanih parametara kvaliteta servisa. U ovom delu rada razmatraju se prednosti i ograničenja metoda frakcione analize za opisivanje fraktalnih svojstava izmerenog saobraćaja.

Fraktalna svojstva ukazuju na postojanje perioda koncentrovanja visokih ili niskih aktivnosti izvora saobraćaja u velikim vremenskim intervalima. Rezultat toga jeste da je korelaciona struktura *stream*-ova saobraćaja u savremenim mrežama u kontradiktornosti sa tradicionalnim modelima, pa se Poasonovim modelima ne mogu opisati empirijski utvrđena fraktalna svojstva agregatnog saobraćaja. Svi *stream*-ovi se statistički multipleksiraju sa lokalnim neregularnostima u čvorovima. Stoga, svaki paket ima stohastičko kašnjenje i dolazi do netrivijalnih stohastičkih pojava. Statistike prvog reda kašnjenja paketa pružaju informacije u pogledu dužine *burst*-a, a statistike drugog reda pružaju informacije o neregularnostima u okruženju i njihovoj spektralnoj gustini. U takvim tokovima paketa negativna razlika između vremena međudolazaka i međuodlazaka paketa odgovara formiranju klastera, što povećava verovatnoću odbacivanja paketa i utiče na parametre kvaliteta servisa. Kako bi se obezbedio potpun opis takvih procesa, neophodno je u analizu uključiti svojstva koja se ispoljavaju u kraćim i dužim vremenskim intervalima. Frakciona analiza tokova paketa u različitim intervalima omogućava opis frakcione prirode saobraćaja u mreži i kvalitativno i kvantitativno (Zaborovsky, http://www.neva.ru/conf/art/art7.html).

Izmereni saobraćaj u mreži je konzistentan u velikim vremenskim intervalima ili asimptotski samosličan i može se opisati jednostavnim modelom sa jednim parametrom. Ovo svojstvo važi globalno i u vremenskom domenu i u obimu i neznatno izmenjeno u kraćim vremenskim intervalima. Dakle, za potrebe modelovanja saobraćaja neophodno je u model ugraditi mogućnost lokalizacije u velikim vremenskim intervalima . Mera u kojoj se proces u mreži može smatrati fraktalnim može se zapisati na sledeći način (Zaborovsky, http://www.neva.ru/conf/art/art7.html):

$$L(\delta) = a\delta^{1-D} \tag{14}$$

gde je D – fraktalna dimenzija, δ – parametar skaliranja izabranog elementa, a – faktor koji opisuje meru. Neka je $g(t)$ funkcija kojom se opisuju svojstva procesa. Ako važi sledeća jednakost

$$g(\varphi t) = \varphi^{\alpha} g(t) \tag{15}$$

proces ima svojstvo invarijantnosti obima. Jednakost (15) omogućava definisanje klase modela koji opisuju svojstva samosličnosti. Na primer, za model gubitala dinamičkog sistema važi:

$$u(t) = \frac{1}{(2\varepsilon)\, p_t} \int_0^t g(\tau)\left[1\left(t_q^{(m)} \le \tau < t_q^{(m)} + \xi^m t\right)\right] d\tau ,$$

gde je $n = 1, 4, \ldots 2^m$, a jezgro integraljene transformacije može se računati kao:

$$1\left(t_n^{(m)} \le \tau < t_n^{(m)} + \xi^m t\right) = \begin{cases} 1, \tau \in \left(t_n^{(m)} + \xi^m t\right) \\ 0, \tau < t_n^{(m)}, \tau \ge t_n^{(m)} + \xi^m t \end{cases} .$$

Kada $p \to \infty$ ovaj izraz postaje konvolucioni integral iz Kantovog skupa:

$$u(t) = B_\xi \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{t^\beta} \int_0^t (1-\tau)^{\beta-1} g(\tau) d\tau ,$$

gde je $\beta = \ln 2 / \ln 3$ – fraktalna dimenzija, $\Gamma(\beta)$ – Gama funkcija, B_ξ – konstanta koja zavisi od karakteristika Kantovog skupa.

Uzimajući u obzir opšta svojstva procesa u mreži,

$$m_B = M\left\{B(t_1) - B(t_0)\right\} = 0 ,$$

$$D_B = \delta_B^2 = M\left\{\left(B(t_1) - B(t_0)\right)^2\right\} = N_0(t_1 - t_0) \sim t_1 - t_0 ,$$

moguće je napisati:

$$r_H = \frac{M\left\{\left[B_H(t) - B_H(2t) + B_H(2t)\right]\left[B_H(2t) - B_H(t) + B_H(t)\right]\right\}}{M\left\{B_H^2(t)\right\}} - 1 = 2^{2H-1} - 1$$

VOJNOTEHNIČKI GLASNIK / MILITARY TECHNICAL COURIER, 2015., Vol. LXIII, No. 2

Ako je $M\left\{B_H^2(t)\right\}=t^{2H}$ i $k_{2H}(t)=\left(2^{2H-1}-1\right)t^{2H}$, izraz za takav proces može se zapisati kao sledeća konvoluciona jednačina:

$$B_H(t)=\frac{1}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t}h(t-t')dB(t'),$$

gde je:

$$h(t-t')=\begin{cases}(t-t')^{H-1/2}, 0\le t'\le t\\ (t-t')^{H-1/2}, t'<0\end{cases}.$$

Može se uočiti da je jezgro ovog integrala funkcija koja zadovoljava uslov (14). Tako, definicija fraktalnog svojstva ili invarijantnog od obima za kontinualni proces $Z=\left\{Z(t), t\in T\right\}$ zadovoljava jednakost:

$$Z^d(t)=a^{-H}Z(at), t\in T, a>0, 0<H<1.$$

Ako za svako celo *p* važi $X_k=Z(k+1)-Z(k)$, tada je

$$X_n^d=m^{1-H}X_n^{(m)} \tag{16}$$

Ako X ima pozitivnu vrednost i srednja vrednost nije jednaka nuli, ni X ni $X-M\{X\}$ ne može biti precizno samosličan proces u skladu sa definicijom (16). Međutim, $X-M\{X\}$ može biti asimptotski samosličan proces. Za ispitivanje fraktalnih svojstava i karakteristika saobraćaja u mreži, moguće je koristiti apsolutne statističke momente funkcija definisane kao:

$$\mu^{(m)}(q)=M\left\{\left|X^{(m)}\right|^q\right\}=M\left\{\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}X_k\right|^q\right\}.$$

Ako proces X ima svojstvo samosličnosti (16), tada je vrednost $\mu^{(m)}(q)$ proporcionalna $m^{\beta(q)}$. Stoga, za fiksnu vrednost q važi sledeća jednakost:

$$\log\mu^{(m)}(q)=\beta(q)\log m+C(q).$$

Prema (16) moguće je zapisati $\beta(q)=q(H-1)$. U ovom slučaju, svojstvo samosličnosti može se formulisati kao linearna zavisnost od promene $\log\mu^{(m)}(q)$. Kada proces $X(t)$ nelinearno zavisi od q, koristi se multifraktalni koncept. Proces $X(t)$ naziva se multifraktalni ako se logaritam njegovog apsolutnog momenta $\mu^{(m)}(q)$ linearno menja sa promenom logaritma agregatnog nivoa m, ali ne zavisi linearno od q. Za analizu ovih svojstava nije dovoljno koristiti samo prvi ili drugi moment. U tom slučaju koriste se neparametarske statistike za agregatne serije:

$$\hat{\mu}^{(m)}(q) = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{m} \left| X_k^{(m)} \right|^q .$$

Ako se $\log \hat{\mu}^{(m)}(q)$ menja linearno, proces X može se smatrati multifraktalnim (Zaborovsky, http://www.neva.ru/conf/art/art7.html).

Zaključak

Frakcioni račun ima brojne primene u mnogim naučnim disciplinama, a u radu je posebno istaknuta primena frakcionog računa za modelovanje telekomunikacionog saobraćaja. Fenomeni koji se sreću u savremenim telekomunikacionim mrežama, kao što su samosličnost i zavisnost u dugom opsegu, mogu se opisati primenom frakcionog računa. Pokazalo se da pretpostavka o mogućnosti beskonačnog kašnjenja paketa u tranzitnom čvoru u mrežama sa komutacijom paketa adekvatno modeluje odbacivanje paketa u čvoru. *Heavy-tailed* funkcija gustine verovatnoće baferovanja paketa zadovoljava ovu pretpostavku. Pokazalo se da se dinamika prosleđivanja paketa u virtuelnim konekcijama u TCP/IP mrežama opisuje pomoću frakcionih izvoda i odgovara procesima sa zavisnošću u dugom roku. Takođe, frakciona analiza može biti vrlo koristan alat pri izučavanju lokalnih i globalnih fenomena koji se sreću u telekomunikacionim mrežama.

Literatura

Babic, G., Vandalore, B., Jain, R., 1998, *Analysis and Modeling of Traffic in Modern Data Communication Networks*, Ohio State University Technical Report, OSU-CISRC-1/98-TR02

Cheng, Y., Zhuang, W., Ling, X., 2007, Towards an FBM Model Based Network Calculus Framework with Service Differentiation, *Mobile Networks and Application*, 12(5-6), pp.335-346.

Dalir, M., Bashour, M., 2010, *Applications of Fractional Calculus, Applied Mathematical Sciences*, 4(21), pp.1021-1032.

Devetskiotis, M., L.S. da Fonseca, N., 2005, Modeling network traffic with long range dependence: characterization, visualization and tools, *Computer Networks*, 48(3), pp.289-291.

Hifler, R., 2000, *Application of fractional calculus in physics*, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific.

Kim, H., Shroff, N., 2001, Loss Probability Calculations and Asymptotic Analysis for Finite Buffer Multiplexers, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 9(6), pp.755-768.

Miller, K., Ross, B., 1993, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, John Willey and sons.

Park, C., Hernandez-Campos, F., Le, L., Marrond, L.S., Park, J., Papiras, V., Smith, F.D., Smith, R.L., Trovero, M., Zhu, Z., 2011, Long Range Dependence Analysis of InternetTraffic, *Journal of Applied Statistics*, 38(7), pp.1407-1433.

Park, K., Willinger, W., 2001, *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, New York, John Willey and sons.

Smith, R.D., 2011, The Dynamics of Internet Traffic: Self-Similarity, Self-Organization, and Complex Phenomena, *Advances in Complex Systems*, 14(6), pp.905-949.

Zaborovsky, V., Podgurski, Y., Yegorov, S., *New traffic model on the base of fractional calculus*, [Internet], Dostupno na: <http://www.neva.ru/conf/art/art8.html>, Preuzeto: 21.01.2014.

Zaborovsky, V., *Fractal Analysis and Wavelet transform: Potential and Limitation for Traffic Models Design*, [Internet], Dostupno na: <http://www.neva.ru/conf/art/art7.html>, Preuzeto: 21.01.2014.

ВОЗМОЖНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО ТРАФИКА

ОБЛАСТЬ: телекоммуникация
ВИД СТАТЬИ: обзорная статья
ЯЗЫК СТАТЬИ: сербский

Резюме*:*

Дробная производная (или производная дробного порядка) является обобщением математического понятия производной. Существует несколько разных способов обобщить это понятие, но все они совпадают с понятием обычной производной в случае натурального порядка. Данной проблемой занимались многие известные математики, среди которых Эйлер, Риман, Лиувилль, Абель и Фурье. В данной статье приведен обзор некоторых определений, наряду с основными положениями дробного исчисления, которые представлены с акцентом на возможность применения данного метода при моделировании телекоммуникационного трафика.

Дело в том, что метод производной дробного порядка, нашел широкое применение в различных областях науки. Модели, основанные на данном методе, оказались востребованными в физике, механике, электротехнике, биохимии, медицине, экономике, а также в теории вероятности. В данной статье мы анализируем возможность применения метода производной дробного порядка для моделирования телекоммуникационного трафика.

Исследования показывают, что характеристики телекоммуникационного трафика в сети на локальном и глобальном уровнях, а также самоподобие и зависимость в широком диапазоне, могут быть эффективно описаны с помощью метода дробной производной, вместо обычной модели мультипликативного стохастического каскада. В данной статье представлены предлагаемые модели, основанные на методе дробной производной, воспроизводящие явления, присутствующие в современных телекоммуникационных сетях.

Ключевые слова: *моделирование, трафик, телекоммуникации, дробная производная.*

POSSIBILITY OF FRACTIONAL CALCULUS APPLICATION FOR TELECOMMUNICATION TRAFFIC MODELLING

FIELD: Telecommunications
ARTICLE TYPE: Review Paper
ARTICLE LANGUAGE: Serbian

Summary:

Fractional calculus is a field of mathematical analysis concerned with research and application of derivatives and integrals of an arbitrary order. Many famous mathematicians studied the theory of fractional calculus such as Euler, Riemann, Liouville, Abel, Fourier and others. There are many proposed definitions for calculating derivatives and integrals of non-integer order. In this paper, several proposed definitions along with basic statements of fractional calculus are presented with an emphasis on a possibility of fractional calculus application in telecommunication traffic modelling.

The fact is that fractional calculus is widely used in various scientific disciplines in recent decades. Models based on fractional calculus have proved to be very useful in physics, mechanics, electrical engineering, biochemistry, medicine, economy, and probability theory. This paper analyses a possibility of application of fractional calculus for modelling telecommunication traffic. Many research studies have shown that traffic characteristics at a local and global level, such as self-similarity and long range dependence, can efficiently be described by fractional calculus instead of using conventional stochastic processes. Some proposed models based on fractional calculus that describe phenomena present in modern telecommunication networks are presented in this paper.

Introduction

Measurements and statistic analyses of telecommunication traffic have discovered that traffic in packet switched networks shows significant irregularities – burstiness, both in terms of traffic intensity variability and shape of autocorrelation function. It is noticed that traffic has frac-

tional characteristics – self-similarity and long range dependence. As a result, a large bandwidth is required, and very often, this is one of the causes of network inefficiency.

In comparison with conventional models based on Poisson distribution widely used in circuit switched networks, in models based on self-similarity property there are problems that are difficult to predict, measure and control in telecommunication traffic. Thus, measurement, analysis and modelling of self-similar network traffic are a sort of challenge. Different research studies have shown that traffic in modern telecommunication networks can efficiently be described with statistical models based on fractional calculus.

Basic statements of fractional calculus

Although the term „fractional calculus", is actually a misnomer, and a term „integration and differentiation of an arbitrary order" is more suitable, „fractional calculus" has been a common term since l'Hopital's era. Fourier also studied derivatives and integrals of an arbitrary order. Abel applied fractional calculus for an integral equation which appears in a tautochrone problem formulation (find a shape of a curve for which the time taken by an object sliding without friction in uniform gravity to its lowest point is independent of its starting point). The first serious attempt to obtain a logical definition of a fractional derivative belongs to Liouville. Let f be a locally integrable on (a, ∞). Usually, an n-fold iterated integration is marked as ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha} f$ *, and refers to as Riemann-Liouville fractional integral of order α of f. Definitions of integrals and derivatives of an arbitrary order can be consolidated into a differintegral. The process of obtaining a differintegral is referred to as fractional integro-differentiation.*

Some proposed models of fractional calculus application for telecommunication traffic modelling

Recent research of telecommunication traffic has shown that it can efficiently be described by derivatives of an arbitrary order instead of conventional stochastic processes. A new interpretation of fractional calculus creates new fields of application of these mathematical tools in order to achieve understanding of local and global characteristics of network traffic. A fractional dimension and long range dependence can be seen in private, LAN and WAN networks.

Temporal-spatial model for packet transmission in TCP/IP networks

Defining Quality of Service parameters for Internet services requires appropriate virtual connections, depending on traffic flows. Generally, such a connection consists of several transit nodes and links. In modern TCP/IP networks, delay in a given virtual connection can be considered as a constant value. A buffering delay variation causes a propagation delay. The transmission process can be described by equations that can be solved by fractional calculus.

Fractal analysis modelling of telecommunication traffic-potentials and limitations

The fractal properties of telecommunication traffic in packet switched networks indicate the existence of periods of low or high activity concentrations in long time intervals. As a result, the correlation structure of traffic streams is in contradiction with common models. Therefore, the empirically confirmed fractal properties of aggregate traffic cannot be described by Poisson models. All streams are statistically multiplexed with local irregularities in nodes. Thus, each packet is stochastically delayed and non-trivial processes occur. In order to achieve a complete description of these processes, it is necessary to involve the properties existing in short and long intervals in such an analysis. The fractional analysis of packet flows in different time intervals ensures a qualitative and quantitative description of the telecommunication traffic fractional nature.

Conclusion

Fractional calculus has many applications. This paper is primarily concerned with fractional calculus application for telecommunication traffic modelling. It was shown that an indefinite packet delay in the transit node in packet switching networks adequately models the dropping of the packet in the node. The dynamics of packet transmission in virtual connections in TCP/IP networks can be described by the equations in fractional derivatives and it corresponds to processes with long-range-dependence. Also, fractional calculus can be a very useful tool in the research of local and global phenomena in telecommunication networks.

Key words: models, traffic, telecommunications, fractional calculus.

Datum prijema članka / Paper received on / Дата получения работы: 19. 06. 2014.
Datum dostavljanja ispravki rukopisa / Manuscript corrections submitted on / Дата получения исправленной версии работы: 23. 09. 2014.
Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje / Paper accepted for publishing on / Дата окончательного согласования работы: 25. 09. 2014.