METOD VEKTORA SLIČNOSTI VARIJANATA IDEALNOM REŠENJU

Radomir R. Đukić
Kruševac
e-mail: raddjukic@gmail.com,
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-3799-8009

DOI: 10.5937/vojtehg64-8418
OBLAST: operaciona istraživanja, višeatributno odlučivanje
VRSTA ČLANKA: originalni naučni članak
JEZIK ČLANKA: srpski

Sažetak:

U članku se razmatra postupak rešavanja problema višeatributnog odlučivanja na jednom nivou kriterijuma i prezentuje metod zasnovan na elementima kompromisnog odlučivanja, Lp metrici i TOPSIS metodu. Daju se preporuke za formiranje početne matrice odlučivanja i transformaciju raznorodnih kriterijumskih vrednosti. Kompromisna rešenja dobijaju se na osnovu vrednosti funkcija Lp metrike i njihovih kombinacija sa koeficijentima − funkcijama relativne verodostojnosti zavisnim od dimenzija problema. Dobijena rešenja zavisna su od parametra p u Lp metrici koji je balansirajući faktor između rešenja sa najvećom ukupnom koristi i rešenja sa minimaks odstupanjima kriterijumskih vrednosti od ideala i antiideala. Ako se zahteva jedinstveno rešenje, ono se dobija objedinjavanjem svih funkcija Lp metrike i primenom vektora sličnosti varijanata idealu, kojim je obuhvaćen i uticaj antiideala. Prikazan je i postupak dobijanja kompromisnih rešenja na osnovu vrednosti elemenata parcijalnih vektora sličnosti idealu i uticaj subjektivno određenog antiideala na rešenja. Primena metoda prikazana je numeričkim primerom.

Ključne reči: *višekriterijumsko odlučivanje (VKO), transformacija kriterijumskih vrednosti, kompromisno rešenje, idealno rešenje, Lp metrika, vektor sličnosti idealu (VSI).*

Uvod

Problemi višeatributnog odlučivanja (VAO) definišu se kao klasa problema višekriterijumskog odlučivanja (VKO) za koje se formira odgovarajući matematički model, ali ne postoji jednoznačno optimalno rešenje. Za razliku od problema višeciljnog odlučivanja (VCO) kao „dobro struktuiranih“ problema VKO, kada se formira matematički model i primenom poznatih metoda određuje optimalno rešenje (ako postoji), metodima VAO („meki“ metodi) rešavaju se „loše strukturirani“ problemi VKO (Nikolić, Borović, 1998).

Metod aditivnih težina je najstariji, najjednostavniji, ali i široko primenjivan za rešavanje problema VAO. Od složenijih metoda kod nas su najviše primenjivani metodi ELECTRE, PROMETHEE i AHP, a manje metodi koji se zasnivaju na *Lp* metrici, iako se njihovom primenom dobijaju kompromisna rešenja, pogodna za dodatnu analizu i poređenja varijanata. Iz grupe metoda kompromisnog rangiranja varijanata kod nas je najpoznatiji metod VIKOR (Opricović, 1998).

Posebnu klasu metoda VAO sačinjavaju metodi koji se baziraju na odnosu kriterijumskih vrednosti varijanata prema vrednostima ideala i/ili antiideala. Obično se podrazumeva da su to „opaženi“ ideal i antiideal, određeni na objektivan način i sa elementima koji su ekstremne kriterijumske vrednosti varijanata. Na taj način formira se primarno područje varijanata (PPV). Donosilac odluke (DO) može da odredi ideal i/ili antiideal i izvan PPV, čime se formira sekundarno područje varijanata (SPV); u problem se unosi subjektivizam DO i moguće su subjektivne preferencije nekih kriterijuma.

U radu su kao osnov postupka za rešavanje problema VAO primenjeni: *Lp* metrika (Zeleny, 1982), kompromisno programiranje (Opricović, 1986), (Yoon, 1987) i TOPSIS metod (Hwang, Yoon, 1981). Kompromisna rešenja dobijaju se na osnovu parametra *Lp* metrike (*p*) koji predstavlja i parametar uravnoteženja između ukupne korisnosti i pojedinačnog odstupanja kriterijumskih vrednosti od ideala i antiideala. Linearnim kombinacijama vrednosti funkcija *Lp* metrike za različite vrednosti parametra *p*, za svaku varijantu dobija se objedinjeno rastojanje varijante od ideala i rastojanje od antiideala i dva nova kompromisna rešenja. Konačno rešenje (najbolja varijanta) dobija se prema vrednostima elemenata vektora sličnosti varijanata idealu (VSI), koji objedinjava parametre odnosa varijanata prema idealu i antiidealu. Elementi VSI su koeficijenti sličnosti varijanata idealu (KSI) u intervalu [0,1]) i predstavljaju udaljenost varijante od antiideala i kvantitativan su pokazatelj koliko je varijanta dobra u poređenju sa idealom. Na taj način se određuje i koja od referentnih tačaka ima veći uticaj ili pod čijom „kontrolom ” je varijanta.

U radu je prikazan deo šireg istraživanja primene metoda VSI koje obuhvata i analizu osetljivosti rešenja na promenu težina kriterijuma, uticaj proširenja područja varijanata na rešenja, kao i postupak rešavanja hijerarhijski strukturiranih problema VAO primenom metoda VSI. Zbog ograničenog obima rada navedeni delovi istraživanja nisu prikazani.

Matrica odlučivanja i područja varijanata

Ako je skup varijanata $V = \{V_i \mid i = \overline{1,m}\}$ i svaka od njih je opisana sa *n* atributa koji se u procesu odlučivanja koriste kao kriterijumi $K_j;\ j = \overline{1,n}$, problem VAO sastoji se u određivanju varijante V_i, koja je najbolja u odnosu na sve kriterijume K_j. Matrica odlučivanja je $C = \{c_{ij};\, i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}\}$, gde su $c_{ij} \in R$ poznate numeričke vrednosti varijanata V_i prema svakom od kriterijuma K_j (kriterijumske vrednosti), a mogu biti realne vrednosti, njihove ocene ili ocene kvalitativnih pokazatelja. Kriterijumima su pridružene težine $w_j \in (0,1)$ i logički operatori (min/max kriterijumi: $L_j = \pm 1$).

Ako to priroda problema zahteva, rešenjem problema VAO može se odrediti i grupa povoljnih varijanata ili rang-lista svih varijanata.

Uopšteno, varijante su nezavisne, a kriterijumi međusobno mogu da budu i zavisni. U radu će se kriterijumi smatrati nezavisnim, osim pri utvrđivanju njihovih težina.

Početna matrica odlučivanja

Priprema matrice odlučivanja za primenu metoda VAO zahteva sistemsku preliminarnu analizu problema koji se rešava, pri čemu treba detaljno da se sagledaju svi faktori koji utiču na razmatrani problem VAO, kao i njihova međuzavisnost.

Donosilac odluke, u skladu sa definisanim ciljem VAO (rang-lista svih varijanata, izbor grupe povoljnih varijanata ili izbor najbolje varijante), u preliminarnoj analizi problema treba da odgovori na nimalo laka pitanja, kao što su: koje su varijante moguće i realne, koliki je broj i šta je sadržaj zahteva za kvalitet varijanata, koliko je važnih kriterijuma i šta je njihov sadržaj, kakvi su im međusobni odnosi i uticaj na problem, koje kriterijume i do kog nivoa treba dekomponovati, kako definisati kriterijumske vrednosti i koliki je njihov pojedinačni uticaj na kvalitet varijanata, koje podatke treba prikupiti o varijantama i drugo. Odgovori na ova i druga pitanja u vezi sa problemom nisu jednostavni, pa je time i obaveza DO da u prethodnoj analizi obradi sve relevantne faktore, ali i da izbegne neargumentovane uticaje i preporuke koje mogu da dovedu do neobjektivnog rešenja.

Izbor cilja je važan zato što se pri određivanju kompletne rang-liste ili pri izboru grupe najpovoljnijih varijanata ne sme vršiti test efikasnosti varijanata (rešenja) zbog mogućnosti da dobre varijante, koje se pokažu kao neefikasne, budu odbačene. Kada je cilj VAO izbor jedne najpovoljnije varijante, test efikasnosti je preporučljiv (ali nije neophodan) i njime se problem redukuje, a neefikasne varijante eliminišu iz daljeg postupka. Testom efikasnosti može se odrediti i superiorna (dominantna) varijanta, ako postoji.

Određivanje težina kriterijuma $w_j \in (0,1)$ je posebno osetljivo pitanje u VAO, jer imaju veliki uticaj na rešenja. Težine se određuju objektivnim ili subjektivnim metodima ili njihovim kombinovanjem. Određivanjem vektora težina objektivnim metodima olakšava se rad DO (Milićević, Župac, 2012a, str.39-56). Tada DO ne ispoljava uticaj na njihove vrednosti i one se određuju, uglavnom, za nepromenjene uslove. Subjektivni metodi (Milićević, Župac, 2012b, str.48-70) uključuju DO u određivanje težina kriterijuma i zasnivaju se na saznanjima o okruženju i situaciji u kojoj i za koju se rešava problem, čime se ispoljava njegov uticaj na rešenje. To je posebno važno za sisteme i pojave podložne promenama u kratkim periodima, kada se za promenjene uslove mora preispitati i već utvrđeni vektor težina kriterijuma. Težine kriterijuma obično su brojne vrednosti u intervalu (0,1), a mogu se zadati i kao stohastičke veličine, fazi brojevi ili intervalno oko nominalne vrednosti, posebno kada je za određivanje težina primenjen grupni metod (Blagojević, Matić-Kekić, 2012, str.255-266) ili se težine određuju primenom više metoda.

Logički operatori L_j određuju da li su kriterijumi monotono rastući ($L_j = 1$) ili monotono opadajući ($L_j = -1$).Nemonotoni kriterijumi se određenim postupcima prevode u jedan od dva oblika monotonih kriterijuma, a logički operatori zavise od novog oblika kriterijuma. Mogući način prevođenja kvantitativnih nemonotonih kriterijuma u monotono opadajuće ($L_j = 1$) jeste određivanje vrednosti pomoćnih kriterijumskih funkcija $c'_{ij} = | c_{ij} - \mu_j |$, gde je μ_j najpovoljnija vrednost kriterijum K_j.

Prikupljanje, selektovanje i analitička obrada podataka uslovljena je prirodom kriterijuma i mogućnostima DO. Cilj je da se svaka varijanta prema svakom od kriterijuma okarakteriše brojem – kriterijumskom vrednošću. U toku prikupljanja podataka i njihovoj analizi moguće su i promene relevantnih kriterijuma (povećanje ili smanjenje njihovog broja, objedinjavanje više kriterijuma u jedan ili eventualno utvrđivanje potreba za dekomponovanje pojedinih kriterijuma) ili promene vektora težina.

Kvantifikacija podataka kvalitativnih kriterijuma vrši se ocenjivanjem (pojedinačno ili grupno) na izabranoj skali ocenjivanja ili drugim metodima. U ovoj fazi određuju se pragovi kvaliteta za svaki kriterijum ili kriterijumske vrednosti koje su prihvatljive za DO i koje svaka varijanta mora da ispunjava kako bi bila razmatrana (ne radi se ako je cilj određivanje rang-liste svih varijanata). Pragovi kvaliteta ili kritične kriterijumske vrednosti osiguravaju da se kao najpovoljnije rešenje ne izabere varijanta koja za jedan ili više kriterijuma nema minimum potrebnih kvaliteta, a prema svim ostalim kriterijumima je veoma kvalitetna. Ako se ideal i antiideal definišu izvan PPV, u ovoj fazi određuju se i vrednosti njihovih elemenata.

Primarno i sekundarno područje varijanata

Primarno područje varijanata (PPV) jeste višedimenzionalni prostor (dimenzije zavise od broja kriterijuma; varijanta je višedimenzionalna tačka) i sadrži sve kriterijumske vrednosti skupa varijanata V_i, ograničeno je njihovim ekstremnim vrednostima, a određuju ga dve referentne tačke: primarni („opaženi") ideal i antiideal $V_N^* = \{c_j^*\}$ i $V_N^- = \{c_j^-\}$, sa elementima:

$$c_j^* = max_i\{c_{ij}; j \in J^+\} \wedge c_j^* = min_i\{c_{ij}; j \in J^-\};$$
$$c_j^- = min_i\{c_{ij}; j \in J^+\} \wedge c_{ij}^- = max_i\{c_{ij}; j \in J^-\}; \qquad (1)$$

gde podskup $J^+ = \{j \mid L_j = 1\}$ predstavlja monotono rastuće, a podskup $J^- = \{j \mid L_j = -1\}$ monotono opadajuće kriterijume $(J^+ \cup J^- = J)$.

Sekundarno područje varijanata (SPV) takođe je višedimenzionalni prostor u kojem je sadržano PPV, a čije granice određuju tačke sekundarnih (imaginarnih) ideala i antiideala $(V_S^{*,*}; V_S^{-,-})$. Donosilac odluke određuje poželjne i nepoželjne (kritične) kriterijumske vrednosti izvan PPV ili u kombinaciji sa graničnim kriterijumskim vrednostima PPV i definiše „željeni" ideal $V_S^{*,*} = \{c_j^{*,*}\}$ i „zahtevani" antiideal $V_S^{-,-} = \{c_j^{-,-}\}$. Odnos elemenata referentnih tačaka PPV i SPV je:

$$c_j^* \le c_j^{*,*} \wedge c_j^- \ge c_j^{-,-}; j \in J^+ \text{ i } c_j^* \ge c_j^{*,*} \wedge c_j^- \le c_j^{-,-}; j \in J^-. \qquad (2)$$

Proširenje PV postoji ako je ispunjen bar jedan od uslova:

− u sekundarnom idealu $V_S^{*,*}$ postoji makar jedna imaginarna kriterijumska vrednost $c_j^{*,*}$ koja bi bila povoljnija za kvalitet varijanata od kriterijumske vrednosti istog kriterijuma c_j^* u primarnom idealu V_N^* (npr.: manji troškovi, veća pouzdanost):

$$c_j^* < c_j^{*,*}, j \in J^+ \vee c_j^* > c_j^{*,*}, j \in J^-; \exists j \in J \text{ ; ili}$$

− u sekundarnom antiidealu $V_S^{-,-}$ postoji makar jedna imaginarna kriterijumska vrednost koja bi bila nepovoljnija za kvalitet varijanata od kriterijumske vrednosti istog kriterijuma c_j^- u primarnom antiidealu V_N^- (npr.: veći troškovi, manja pouzdanost):

$$c_j^- > c_j^{-,-}, j \in J^+ \vee c_j^- < c_j^{-,-}, j \in J^-; \exists j \in J.$$

U PPV je moguće dodavanje novih varijanata sa kriterijumskim vrednostima koje ne prelaze njegove granice i time se poredak postojećih varijanata ne menja. Dodavanjem novih varijanata sa kriterijumskim vrednostima izvan postojećeg PPV, ili isključivanjem nekih od postojećih varijanata, postoji mogućnost da će se formirati novo PPV sa novim referentnim tačkama $(V_N^*;\ V_N^-)$, a poredak postojećih varijanata je podložan promenama. Pri povećanju ili smanjenju broja varijanata ili zameni nekih postojećih novim varijantama, stalnost poretka postojećih varijanata osigurava se formiranjem SPV sa stalnim referentnim tačkama $(V_S^{**};V_S^{--})$, koje je dovoljno „prostrano” da prihvati i sve kriterijumske vrednosti novih varijanata.

Određivanjem ideala i antiideala na subjektivan način DO precizira kriterijumski okvir vrednosti ili interval prihvatljivih vrednosti za svaki kriterijum. Definisanjem vrednosti elemenata antiideala $V_S^{--}=\{c_j^{--}\}$ u SPV istovremeno se mogu definisati i kritične kriterijumske vrednosti. Za jedan kriterijum vrednost elementa antiideala i kritična kriterijumska vrednost mogu (ali ne moraju) da budu jednake. Pri njihovim različitim vrednostima, za definisanje kritičnih vrednosti moraju se postaviti stroži uslovi, jer SPV mora obuhvatiti sve kritične vrednosti kriterijuma. Ako DO ne definiše antiideal, potrebno je da definiše kritične kriterijumske vrednosti, osim ako se zahteva samo rang-lista, a ne i izbor najpovoljnije varijante ili grupe povoljnih varijanata.

Subjektivno određivanje ideala i antiideala nije lak zadatak za DO i zahteva njegovo dobro poznavanje svih faktora koji utiču na problem koji se rešava, jer pri tome treba odrediti moguće vrednosti kriterijuma kojih nema u skupu realnih kriterijumskih vrednosti. Postoji rizik da se ideal i antiideal odrede znatno izvan PPV, čime se povećavaju razlike između realnih i referentnih vrednosti i gubi se na značaju razlika parametara kvaliteta realnih varijanata (gubi se oštrina ocene kvaliteta varijanata).

Mnogo je teže određivanje ideala nego antiideala, pa ima smisla određivati i položaj varijante u odnosu na antiideal (ili: ako je varijanta dalja od antiideala, verovatno je onda i bliža idealu, pa time i kvalitetnija). Pravilno određivanje antiideala izvan PPV omogućuje bolju transformaciju realnih kriterijumskih vrednosti u bezdimenzionalne parametre.

Numerički primer. Metod vektora sličnosti varijanata idealu biće prikazan na numeričkom primeru sa četiri varijante i pet kriterijuma. Početna matrica kriterijumskih vrednosti $C=\{c_{ij};i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,5}\}$, sa težinama kriterijuma $w_j\in(0,1)$ i logičkim operatorima L_j, prikazana je u tabeli 1. U istoj tabeli prikazani su i elementi V^* i V^- dobijeni primenom izraza (1), a radi analize odnosa PPV i SPV uvodi se $X=\{x_j; j=\overline{1,n}\}$, kao veštačka varijanta i središte PPV, sa elementima $x_j=(c_j^*+c_j^-)/2; \forall j \in J$.

Tabela 1 – Početna matrica odlučivanja $C=\{c_{ij}\}$ u primarnom PV
Таблица 1 – Исходная матрица принятия решений $C=\{c_{ij}\}$ в первичном PV
Table 1 – Initial decision-making matrix $C=\{c_{ij}\}$ in the primary S

i \ j		Kriterijumi				
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Varijante	V_1	405	90	1134	60	142
	V_2	370	83	970	36	154
	V_3	418	72	990	44	144
	V_4	352	62	1028	54	120
Refer. tačke	X	385	76	1050	48	137
	V^*	418	62	1134	36	154
	V^-	352	90	970	60	120
w_j		0,13	0,22	0,28	0,20	0,17
L_j		1	-1	1	-1	1

Težine kriterijuma ocenjene su poređenjem po parovima i primenom linearne celobrojne skale ocenjivanja.

Transformacija kriterijumskih vrednosti

Vrednosti elemenata početne matrice $C=\{c_{ij}\}$ obično su, prema kriterijumima, izražene različitim jedinicama mera (heterogeni kriterijumski prostor), pa je radi moguće primene metoda potrebno da se oni transformišu u bezdimenzionalne veličine. Ovde se koristi transformacija na osnovu raspona (dužine intervala) kriterijumskih vrednosti $|c_j^*-c_j^-|$, pri čemu se smatra da su c_j^* najbolje, a c_j^- najlošije kriterijumske vrednosti, a transformisane – normalizovane vrednosti su u intervalu [0,1]. Matrica $C=\{c_{ij}\}$ transformiše se u matricu $A=\{a_{ij}\}$, gde su $a_{ij}=a_j(i)$ normalizovani bezdimenzionalni parametri:

$$a_{ij}=(c_{ij}-c_j^-)/(c_j^*-c_j^-),\ 0\le a_{ij}\le 1, \tag{3}$$

kada se svi kriterijumi prevode u monotono rastuće ($L_j = 1; \forall j \in J$). Tako je: $a_{11} = (c_{11} - c_1^-)/(c_1^* - c_1^-) = (405 - 352)/(418 - 352) = 0{,}803$ (tabela 2).

Tabela 2 – Matrice normalizovanih kriterijumskih vrednosti $A = \{a_{ij}\}$ u primarnom PV

Таблица 2 – Матрицы нормированных значений по критериям $A = \{a_{ij}\}$ в первичном PV

Table 2 – Matrices of the normalised criteria values $A = \{a_{ij}\}$ in the primary SA

i \ j		Kriterijumi					$\sum_{j\in J} w_j a_{ij}$
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
Varijante	V_1	0,803	0,000	1,000	0,000	0,647	0,494
	V_2	0,273	0,250	0,000	1,000	1,000	0,460
	V_3	1,000	0,643	0,122	0,667	0,706	0,559
	V_4	0,000	1,000	0,354	0,250	0,000	0,369
Refer. tačke	X	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	V^*	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	V^-	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_j		0,13	0,22	0,28	0,20	0,17	$R^A(i)$: **3**-1-2-4
$R_j^A(i)$		**3**-1-2-4	**4**-3-2-1	**1**-4-3-2	**2**-3-4-1	**2**-3-1-4	

Ovakva transformacija je moguća kada su kriterijumi međusobno nezavisni ili se njihova međuzavisnost ne razmatra. Transformacija ima nedostatke, jer kriterijumske vrednosti za kriterijume sa manjim rasponom dobijaju veći značaj od vrednosti kriterijuma sa većim rasponom, što je posledica izbora ideala i antiideala od poznatih kriterijumskih vrednosti („opažene" vrednosti). Ovaj nedostatak se delimično kompenzuje samom transformacijom, jer se „gubici" koje varijante imaju kod kriterijuma sa većim rasponom, delimično nadoknađuju kod kriterijuma sa manjim rasponom kriterijumskih vrednosti, a stepen kompenzacije raste sa povećanjem broja kriterijuma. Zbog ovog nedostatka transformacije, u pojedinim slučajevima je opravdano da DO određuje ideal i antiideal (ili samo antiideal) izvan PPV, iako se time, već na početku procesa odlučivanja, unosi dodatni subjektivizam DO.

Povećanjem raspona kriterijumskih vrednosti i transformacijom dobijaju se realniji odnosi između transformisanih kriterijumskih vrednosti. Za kriterijume sa velikim numeričkim vrednostima i relativno malim međusobnim razlikama između varijanata, pri ovoj transformaciji dobijaju se velike razlike transformisanih vrednosti, što nije opravdano. Radi otklanjanja ovog nedostatka, realne kriterijumske vrednosti mogu se posebno oceniti na izabranoj skali ocena ili odrediti vrednost antiideala izvan PPV i naknadno izvršiti transformacija u interval [0,1].

Ideal $V^*=\{a_j^*\}$ i antiideala $V^-=\{a_j^-\}$ i imaju normalizovane elemente: $a_j^*=max_i\{a_{ij}\}=1$ i $a_j^-=min_i\{a_{ij}\}=0$, prema kojima se mogu odrediti parcijalni rangovi varijanata $R_j^A(i)=max_i\{a_{ij}; i=\overline{1,m}\}$ za svaki od kriterijuma K_j. Na osnovu vrednosti $\sum_{j=1}^{j=n} w_j a_{ij}; i=\overline{1,m}$, može se ustanoviti rang varijanata prema svim kriterijumima istovremeno, primenom jednostavnog metoda aditivnih težina (Hwang, Yoon, 1981), prema kriterijumu: $R^A(i)=max_i\{\sum_{j=1}^{j=n} w_j a_{ij}\}$ (tabela 2).

Primena *Lp* metrike u VAO

Pri rangiranju i izboru najpovoljnije varijante prema svim zadatim kriterijumima, dobro je poznavati više mogućih rešenja, kao i posledice izbora jednog od njih. To omogućava primena *Lp* metrike kojom se definiše udaljenost tačaka $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ i $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ u *n*-dimenzionalnom prostoru: $d_p=L_p(A;B)=\{\sum_{j=1}^{j=n}|a_j-b_j|^p\}^{1/p};\ 1\le p\le\infty$. *Lp* metrika u VAO je mera rastojanja varijanata od ideala i antiideala i čini osnov za određivanje kompromisnih rešenja. Primenom različitih vrednosti za parametar *Lp* metrike $p\in[1,\infty)$ dobija se više rešenja (rešenje je najbolja varijanta), odnosno kompromisna rešenja problema VAO.

Efikasno i kompromisno rešenje:

Efikasno rešenje (Pareto optimalno, neinferiorno, nedominirano) u problemu VAO je ono rešenje - varijanta V_k iz skupa varijanata V_i, ako ne postoji druga varijanta V_l koja poseduje bar jednu kriterijumsku vrednost koja je bolja od istovrsne kriterijumske vrednosti varijante V_k, a sve ostale kriterijumske vrednosti nisu lošije od vrednosti varijante V_k. Prema normalizovanoj matrici $A=\{a_{ij}=a_j(i)\}$, kada su svi kriterijumi prevedeni u monotono rastuće $(L_j=1;\forall j\in J)$, efikasno rešenje je varijanta

V_k kada ne postoji varijanta V_l za koju je ispunjeno: $a_j(k) \le a_j(l); \forall j \in J$ i $a_j(k) < a_j(l); \exists j \in J$. Efikasno rešenje može da bude i dominantno, odnosno najbolje prema svim kriterijumima (po definiciji, to je varijanta V_l, ako su u odnosu na nju sve ostale varijante $V_i; i \ne l$ neefikasne), kada je i optimalno i jedinstveno po kriterijumskim vrednostima. Neefikasna varijanta je ona nad kojom dominira bar jedna od preostalih varijanata. U primeru su sva rešenja (varijante V_i) efikasna i ne postoji optimalno (dominantno) rešenje problema VAO.

Kompromisno rešenje problema VAO je varijanta V_q koja je najbolja iz skupa varijanata V_i na osnovu primenjenog postupka, parametra *Lp* metrike $1 \le p \le \infty$ i izabranih referentnih tačaka $(V^*;\ V^-)$. Kompromisnim rešenjem može se smatrati i rang-lista varijanata, grupa povoljnih varijanata i slično, ako je to definisani cilj VAO.

Rastojanja Lp metrike: Najčešće primenjivani parametri *Lp* metrike su $p = 1,2,\infty$. U opštem slučaju i bez obzira na PV, za ove parametre se definišu rastojanja varijanata $V_i = \{a_{ij}\}$ od ideala $V^* = \{a_j^*\}$ i anti-ideala $V^- = \{a_j^-\}$.

Rastojanja $d_p^*(i)$ prema idealu V^* su:

$d_p^*(i) = L_p(V^*; V_i) = [\sum_{j=1}^{j=n} w_j^p (a_j^* - a_{ij})^p]^{1/p}$ i za $p = 1,2,\infty$ sledi:

a) $p = 1$: $d_1^*(i) = \sum_{j=1}^{j=n} w_j (a_j^* - a_{ij})$ – pravougaono (Menhetn) rastojanje;

b) $p = 2$: $d_2^*(i) = [\sum_{j=1}^{j=n} w_j^2 (a_j^* - a_{ij})^2]^{1/2}$ – Euklidovo rastojanje, i

c) $p = \infty$: $d_\infty^*(i) = max_j [w_j (a_j^* - a_{ij})]$ – Čebiševljevo rastojanje. (4)

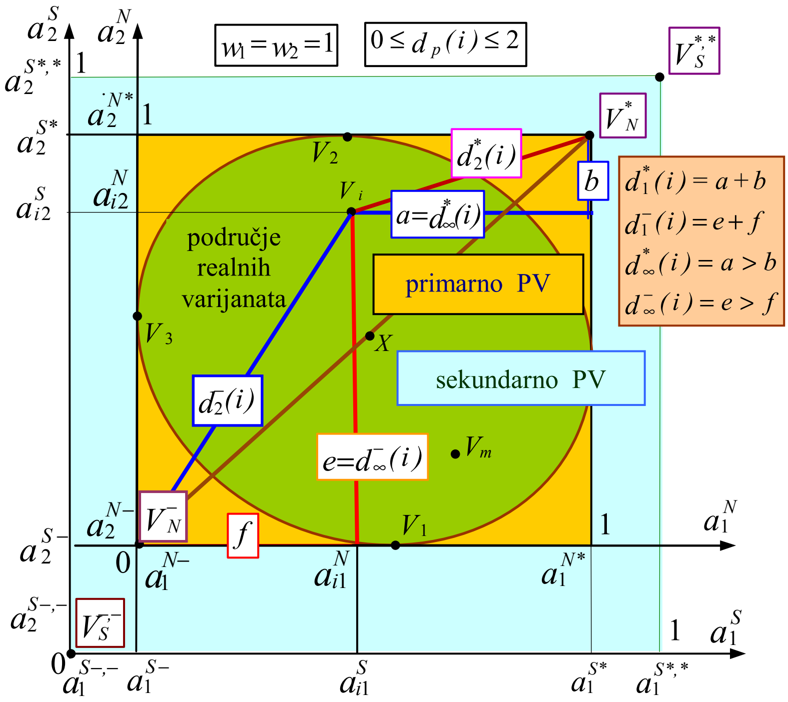
Rastojanja $d_p^-(i)$ prema antiidealu V^- su:

$d_p^-(i) = L_p(V^-; V_i) = [\sum_{j=1}^{j=n} w_j^p (a_{ij} - a_j^-)^p]^{1/p}$, odakle sledi:

a) $p = 1;\ d_1^-(i) = \sum_{j=1}^{j=n} w_j (a_{ij} - a_j^-)$;

b) $p = 2;\ d_2^-(i) = [\sum_{j=1}^{j=n} w_j^2 (a_{ij} - a_j^-)^2]^{1/2}$;

c) $p = \infty;\ d_\infty^-(i) = max_j \{w_j (a_{ij} - a_j^-)\}$. (5)



Slika 1 – Funkcije Lp metrike varijante V_i u primarnom PV za dva kriterijuma

Рис. 1 – Функции Lp метрики альтернативных показателей на первичном PV для двух критериев

Figure 1 – Lp functions of the V_i alternative metrics in the primary SA for two criteria

To su „čista” rastojanja *Lp* metrike, dobijena na osnovu pojedinačnih vrednosti $p=1$, $p=2$ ili $p=\infty$. Prikaz elementarnih funkcija *Lp* metrike za varijantu V_i i dva kriterijuma jednakih težina $(w_1 = w_2 = 1)$ u primarnom PV, kao i odnos sa sekundarnim PV, gde su $0 \le d_p(i) \le 2$, dat je na slici 1.

Za svaki $p = 1,2,\infty$ i $\sum_{j\in J} w_j = 1$ je $d_p^*(V^*) = d_p^-(V^-) = 0$, a rastojanja $d_p^*(V^-)$ i $d_p^-(V^*)$ su nezavisna od kriterijumskih vrednosti i zavisna samo od težina kriterijuma:

$$d_1^*(V^-) = d_1^-(V^*) = \sum_{j=1}^{j=n} w_j = 1;\ d_2^*\left(V^-\right) = d_2^-(V^*) = \left[\sum_{j=1}^{j=n} w_j^2\right]^{1/2};$$

$$d_\infty^*(V^-) = d_\infty^-(V^*) = max_j\{w_j\}. \tag{6}$$

U primeru je:

$$d_1^*(1)=\sum_{j=1}^{j=5} w_j(a_j^*-a_{ij})=0{,}13\cdot(1-0{,}803)+\cdots+0{,}17\cdot(1-0{,}647)=0{,}506\ ;$$

$d_2^*(V^-)=d_2^-(V^*)=0{,}461;\ d_\infty^*(V^-)=d_\infty^-(V^*)=0{,}280$, a vrednosti $d_p^*(X)$ i $d_p^-(X)$ su polovine čistih rastojanja između ideala i antiideala za svaki $p=1{,}2{,}\infty$.

Rangovi varijanata određuju se prema kriterijumu:

$$R_p^*(i)=min_i\{d_p^*(i);\ i=\overline{1,m}\}\ \text{ i }\ R_p^-(i)=max_i\{d_p^-(i);\ i=\overline{1,m}\}. \qquad (7)$$

Vrednosti $d_p^*(i)$ i $d_p^-(i)$ i rangovi varijanata $R_p(i)$ prikazani su u tabeli 3.

Tabela 3 – Vrednosti rastojanja Lp metrike
Таблица 3 – Значения расстояний Lp метрики
Table 3 – Values of the Lp metrics distances

$d_p(i)$	Varijante				Referentne tačke			Rang $R_p(i)$
	V_1	V_2	V_3	V_4	X	V^*	V^-	
$d_1^*(i)$	0,506	0,540	0,441	0,631	0,500	1,000	0,000	**3**-1-2-4
$d_2^*(i)$	0,304	0,338	0,271	0,318	0,231	0,461	0,000	**3**-1-4-2
$d_\infty^*(i)$	0,220	0,280	0,246	0,181	0,140	0,280	0,000	**4**-1-3-2
$d_1^-(i)$	0,494	0,460	0,559	0,369	0,500	0,000	1,000	**3**-1-2-4
$d_2^-(i)$	0,318	0,271	0,265	0,246	0,231	0,000	0,461	**1**-2-3-4
$d_\infty^-(i)$	0,280	0,200	0,141	0,220	0,140	0,000	0,280	**1**-4-2-3

Vrednosti $d_p(i)$ opadaju sa povećanjem $p: d_1(i)\geq d_2(i)\geq d_\infty(i)$, a za $d_1(i)$ važi da je $d_1^*(i)+d_1^-(i)=C$ (ovde: $d_1^*(i)+d_1^-(i)=1$). Sa porastom koeficijenta *p* smanjuje se uticaj varijantama sa manjim kriterijumskim vrednostima i povećava se uticaj varijanata sa većim kriterijumskim vrednostima, tako da za $p=\infty$ na vrednost $d_\infty(i)$ uticaj ima samo varijanta sa najvećom kriterijumskom vrednošću. *Lp* metrika predstavlja dopunski kriterijum prema $1\leq p\leq\infty$ kao parametru uravnoteženja između ukupne korisnosti i pojedinačnog odstupanja kriterijumske vrednosti od ideala i antiideala.

Male vrednosti za p (posebno za $p=1$) formiraju takve rang-liste gde prednost dobijaju varijante kojima se postiže veća ukupna korist, uz mogućnost da neka od vrednosti kriterijuma bude i izrazito loša ($a_{ij}=0$). Veće vrednosti za p (posebno za $p=\infty$) formiraju takve rang-liste gde prednost dobijaju one varijante čije kriterijumske vrednosti imaju manja maksimalna odstupanja od ideala ili veća maksimalna odstupanja od antiideala, a ukupna korist je od manjeg značaja.

Na osnovu datih mera rastojanja za skup varijanata V_i može se dobiti do šest kompromisnih rešenja (najbolja varijanta) i šest nezavisnih rang-listi. Koju rang-listu će DO da prihvati zavisi od uvažavanja uticaja parametra p na ukupne efekte. Metod omogućava da se za dobijanje kompromisnih rešenja primenjuju i druge vrednosti parametra p.

Stvaranje dve nove rang-liste „pomirenjem” neusaglašenih rangova moguće je uvođenjem linearnih kombinacija vrednosti funkcija *Lp* metrike, odnosno objedinjenim rastojanjem („kombinovana” rastojanja) prema idealu i antiidealu:

$$d^*(i)=\sum_p \lambda_{p,\gamma} d^*_p(i);\;\; d^-(i)=\sum_p \lambda_{p,\gamma} d^-_p(i);\;\; p=1,2,\infty;\;\; i=\overline{1,m}; \quad (8)$$

gde je: $\Lambda_\gamma=\{\lambda_{1,\gamma};\lambda_{2,\gamma};\lambda_{\infty,\gamma}\}$; $\lambda_{p,\gamma}$ − koeficijenti linearne kombinacije koji predstavljaju relativnu verodostojnost funkcije d_p za dimenziju γ (npr.: broj kriterijuma, varijanata, klasa, rang-listi i slično), za $\sum_p \lambda_{p,\gamma}=1$. Sopstvena rastojanja za ideal i antiideal su $d^*(V^*)=d^-(V^-)=0$, a rastojanja između njih ne zavise od kriterijumskih vrednosti, već samo od w_j i $\lambda_{p,\gamma}$:

$$d^*(V^-)=d^-(V^*)=\lambda_{1,\gamma}+\lambda_{2,\gamma}[\textstyle\sum_{j=1}^{j=n} w_j^2]^{1/2}+\lambda_{\infty,\gamma}\cdot max_j\{w_j\}. \quad (9)$$

Prema (Yoon,1987), na osnovu funkcije verodostojnosti i simulacijom metodom Monte Karlo za 10.000 eksperimenata i 30.000 slučajnih brojeva u intervalu [0,1], dobijene su vrednosti $\lambda_{p,\gamma}$, kao koeficijenti linearne kombinacije u sistemu tri metrike (d_1, d_2, d_∞), zavisne od dimenzija rešavanog problema (tabela 4). Kod formiranja rangova varijanata, zbog $\lambda_{1,\gamma}\ge\lambda_{2,\gamma}\ge\lambda_{\infty,\gamma}$, prednost se daje ukupnoj koristi nad pojedinačnim minimaks odstupanjima kriterijumskih vrednosti od ideala ili antiideala.

Tabela 4 – Vrednosti koeficijenata linearne kombinacije funkcija *Lp* metrike (Yoon,1987)
Таблица 4 – Значения коэффициента линейной функции Lp метрики (Yoon,1987)
Table 4 – Values of the coefficients of the linear combination of the Lp metrics functions (Yoon,1987)

Dim γ	$\lambda_{1,\gamma}$	$\lambda_{2,\gamma}$	$\lambda_{\infty,\gamma}$	Dim. γ	$\lambda_{1,\gamma}$	$\lambda_{2,\gamma}$	$\lambda_{\infty,\gamma}$
1	0,3333	0,3333	0,3333	8	0,6154	0,2479	0,1367
2	0,4113	0,3146	0,2741	9	0,6328	0,2407	0,1265
3	0,4673	0,2992	0,2335	10	0,6479	0,2342	0,1179
4	0,5098	0,2861	0,2041	11	0,6616	0,2281	0,1103
5	0,5437	0,2747	0,1816	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	0,5717	02647	0,1636	49	0,8302	0,1366	0,0332
7	0,5951	0,2559	0,1490	50	0,8318	0,1356	0,0326

Ako DO ne želi da primeni koeficijente iz tabele 4 i tako uvaži dimenzije rešavanog problema, može sam da odredi koeficijente λ_p, što je posebna pogodnost metoda. On bira vrednosti λ_p tako da se može primeniti samo jedna funkcija ili kombinacija dve ili tri funkcije *Lp* metrike (d_1, d_2, d_∞), zavisno od prirode problema i od toga da li se zahteva veća ukupna korist ($\lambda_1 = 1$), geometrijska bliskost ($\lambda_2 = 1$) ili pojedinačna minimaks odstupanja kriterijumskih vrednosti ($\lambda_\infty = 1$), za $\sum_p \lambda_p = 1$ i $p = 1,2,\infty$.

Zbog naglog rasta koeficijenta $\lambda_{1,\gamma}$ sa porastom broja dimenzija γ, za dobijanje najverodostojnijih kompromisnih rešenja sa matematičke tačke gledišta može se prihvatiti i upotreba samo funkcije $d_1(i)$. Ako se uvažavaju tri funkcije *Lp* metrike, jedinstvena funkcija dobija se primenom koeficijenata $\lambda_{p,\gamma}$, kao njihovih težina u linearnoj kombinaciji, prema izrazu (8).

Dva nova kompromisna rešenja i dve nove nezavisne rang-liste dobijaju se prema rangu varijanata:

$$R^*(i) = min_i\{d^*(i)\} \text{ i } R^-(i) = max_i\{d^-(i)\}, \tag{10}$$

U primeru, za dimenziju problema $\gamma = 5$ (pet kriterijuma, tabela 4) i $p = 1,2,\infty$, vrednost linearne kombinacije $d^*(i)$ varijante V_1 je: $d^*(1) = \sum_p \lambda_p d_p^*(1) = 0{,}5437 \cdot 0{,}506 + 0{,}2747 \cdot 0{,}304 + 0{,}1816 \cdot 0{,}220 = 0{,}398$.

Tabela 5 – Vrednosti linearne kombinacije *Lp* metrike i vektor sličnosti idealu
Таблица 5 – Значения коэффициента линейной функции Lp метрики и идеальный вектор
Table 5 – Values of the Lp metrics linear combination and the similarity to ideal vector

$d(i)$ $s(i)$	Varijante				Referentne tačke			Rang $R(i)$
	V_1	V_2	V_3	V_4	X	V^*	V^-	
$d^*(i)$	0,398	0,437	0,359	0,463	0,361	0,000	0,721	**3**-1-2-4
$d^-(i)$	0,407	0,361	0,402	0,308	0,361	0,721	0,000	**1**-3-2-4
$s(i)$	0,505	0,452	0,528	0,400	0,500	1,000	0,000	**3**-1-2-4
$s'(i)$	0,511	0,448	0,506	0,420	0,500	1,000	0,000	**1**-3-2-4

Iz tabele 5 se vidi da je varijanta V_3 najbliža idealu zbog najmanje vrednosti $d^*(3)=0{,}359$, a varijanta V_1 je najdalja od antiideala zbog najveće vrednosti $d^-(1)=0{,}407$, što ukazuje na postojanje dva nova kompromisna rešenja. Iz izraza (9) sledi da je rastojanje ideala i antiideala $d^*(V^-)=d^-(V^*)=0{,}721$, nezavisno od kriterijumskih vrednosti. Sledi i da je $d^*(X)=d^-(X)=d^*(V^-)/2=d^-(V^*)/2=0{,}721/2\approx 0{,}361$.

Kako su, s obzirom na referentne tačke, dobijena dva kompromisna rešenja, potrebno ih je „pomiriti” primenom jedinstvene mere koja bi objedinila rastojanja $d^*(i)$ i $d^-(i)$.

Vektor sličnosti varijanata idealu

Vektor sličnosti varijanata V_i idealu V^* (VSI) prema svim kriterijumima K_j (za sistem) jeste višedimenzionalni vektor $S=\{s(i);\ i=\overline{1,m}\}$, čiji se elementi (koeficijenti sličnosti varijanata idealu − KSI) određuju na osnovu *mešovitih rastojanja* $d^*(i)$ i $d^-(i)$:

$$s(i)=d^-(i)/[d^*(i)+d^-(i)]\ ;\ 0\le s(i)\le 1\ ;\ \ i=\overline{1,m}\,, \qquad (11)$$

(Hwang, Yoon, 1981).

Vektor sličnosti varijanata antiidealu V^- je: $S^-=\{s^-(i);\ i=\overline{1,m}\};$ $s^-(i)=d^*(i)/[d^*(i)+d^-(i)]$, tako da je i $s(i)+s^-(i)=1$. Vektorom $S=\{s(i)\}$ određeni su rangovi realnih varijanata prema kriterijumu:

$$R^S(i)=max_i\{s(i);\ i=\overline{1,m}\}\,. \qquad (12)$$

Vrednost KSI predstavlja kvantitativni odnos varijante prema idealu (ili stepen „dobrote" varijante), a brojčano je mera rastojanja varijante V_i od antiideala V^-. Za $s(k) > 0{,}5$ (kada je i $d^-(k) > d^*(k)$), na varijantu V_k veći uticaj ima ideal i varijanta se smatra da je pod „kontrolom" ideala.

Parcijalni vektori sličnosti varijanata idealu $S_p = \{ s_p(i);\ i = \overline{1,m} \}$ imaju elemente koji se dobijaju na osnovu „čistih" rastojanja *Lp* metrike:

$$s_p(i) = d_p^-(i) \big/ [d_p^*(i) + d_p^-(i)] \ ; \ 0 \le s_p(i) \le 1 \ ; \ p = 1{,}2{,}\infty \ ; \ i = \overline{1,m} . \quad (13)$$

Tri rang-liste varijanata i tri nova kompromisna rešenja $(V_i; s_p(i))$ dobijaju se prema kriterijumu:

$$R_p^S(i) = max_i \{ s_p(i);\ i = \overline{1,m} \} . \quad (14)$$

Prema vrednostima parcijalnih KSI, dovoljni ali i stroži uslovi da je varijanta V_k pod kontrolom ideala su $s_p(k) > 0{,}5$ za svaki $p = 1{,}2{,}\infty$. Prema izrazima (8,13), definiše se linearna kombinacija parcijalnih KSI:

$$s'(i) = \sum_p \lambda_{p,\gamma} s_p(i);\ \ 0 \le s'(i) \le 1 \ ; \ p = 1{,}2{,}\infty \ ; \ i = \overline{1,m} \ ; \quad (15)$$

kojom je određen objedinjeni VSI: $S' = \{ s'(i); i = \overline{1,m} \}$. Vrednosti koeficijenata $\lambda_{p,\gamma}$ treba odrediti prema broju kriterijuma, tako da je $\gamma = n$, ili će DO koeficijente $\lambda_{p,\gamma}$ ($\sum_p \lambda_p = 1$) odrediti prema tome da li želi veću ukupnu korist ili kontrolisana pojedinačna minimaks odstupanja kriterijumskih vrednosti od ideala i antiideala.

Kako bi se sagledale karakteristike funkcije (13), uvodi se pretpostavka da je $s_p(i) = C$ (konstantna vrednost), kada je:

$$C = d_p^-(i) \big/ [d_p^*(i) + d_p^-(i)] \ \text{ili} \ C \cdot d_p^*(i) - (1 - C) \cdot d_p^-(i) = 0 . \quad (16)$$

Za dva kriterijuma (K_1, K_2) sa težinama (w_1, w_2;), proizvoljno izabranim $C \in (0{,}1)$ i u odnosu na koeficijente matrice $A = \{ a_{ij} ; j = 1{,}2 \}$ kao promenljive varijable (kraći zapis: $a_{i1} = a_1$ i $a_{i2} = a_2$), primenom izraza (4,5,16) i sa $a_1, a_2 \in [0{,}1]$, $a_1^- = a_2^- = 0$, $a_1^* = a_2^* = 1$, dobija se funkcija $a_2 = f(a_1, w, C)$:

− za $p = 1$:

iz $C = (w_1 a_1 + w_2 a_2) \big/ [(w_1(1 - a_1) + w_2(1 - a_2) + w_1 a_1 + w_2 a_2]$ sledi da je $a_2 = -(w_1/w_2) a_1 + C/w_2$ i predstavlja skup paralelnih pravaca;

− za $p = 2$:

iz $C = (w_1^2 a_1^2 + w_2^2 a_2^2)^{1/2} / \{[w_1^2 (1 - a_1)^2 + w_2^2 (1 - a_2)^2]^{1/2} + [w_1^2 a_1^2 + w_2^2 a_2^2]^{1/2}\}$

dobija se skup hiperbola

$$A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_1 + A_4 a_2 + A_5 = 0 ,$$

sa koeficijentima:

$$A_1 = w_1^2 (1 - 2C);\ A_2 = w_2^2 (1 - 2C);\ A_3 = 2C^2 w_1^2;\ A_4 = 2C^2 w_2^2;$$
$$A_5 = -C^2 (w_1^2 + w_2^2).$$

Hiperbole su prema apscisi a_1 konkavne za $C < 0{,}5$ i konveksne za $C > 0{,}5$, a za $C = 0{,}5$ odnos a_1 i a_2 je linearan:

$$a_2 = -(w_1^2 / w_2^2) a_1 + 0{,}5(1 + w_1^2 / w_2^2);$$

− za $p = \infty$:

iz $C = max(w_1 a_1; w_2 a_2) / \{[max(w_1 (1\text{-} a_1); w_2 (1\text{-} a_2)] + max[w_1 a_1; w_2 a_2]\}$,

odrede se oblasti definisanosti funkcije iz kombinacija odnosa $(w_1; w_2)$; $(w_1 a_1; w_2 a_2)$ i $(w_1 (1 - a_1); w_2 (1 - a_2))$, kada je formira osam kombinacija mogućih uslova u zavisnosti od primenjenih znakova < i ≥. Neka su uslovi: (1) $w_1 < w_2$; (2) $w_1 a_1 < w_2 a_2$ i (3) $w_1 (1 - a_1) \ge w_2 (1 - a_2)$; iz uslova (2) i (3) sledi $a_2 > (w_1 / w_2) a_1$ i $a_2 \ge (w_1 / w_2) a_1 - w_1 / w_2 + 1$. Zbog uslova (1) sledi $(w_1 / w_2) a_1 < (w_1 / w_2) a_1 - w_1 / w_2 + 1$, a oblast definisanosti funkcije je poluravan $a_2 \ge (w_1 / w_2) a_1 - w_1 / w_2 + 1$. Iz uslova (2) i (3) dobija se funkcija $C = w_2 a_2 / [w_1 (1 - a_1) + w_2 a_2]$, a iz nje i konačna funkcija $a_2 = f(a_1, w, C)$: $a_2 = -(w_1 / w_2)[C / (1 - C)] a_1 + (w_1 / w_2)[C / (1 - C)]$, izraz a) u tabeli 6.

Na isti način dobijaju se i vrednosti funkcije prema izmenjenim uslovima (1), (2) i (3), tabela 6. Za $C = (0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75)$, $w_1 = 0{,}4$, $w_2 = 0{,}6$ i $p = 1{,}2{,}\infty$, funkcije $a_2 = f(a_1, w, C)$ prikazane su na slici 2.

__Rangiranje varijanata prema VSI.__ Na osnovu izraza (11) dobija se vektor $S = \{s(i);\ i = \overline{1, m}\}$ sa elementima koji predstavljaju rastojanja varijanata V_i od antiideala V^-. Za varijantu V_1 je:

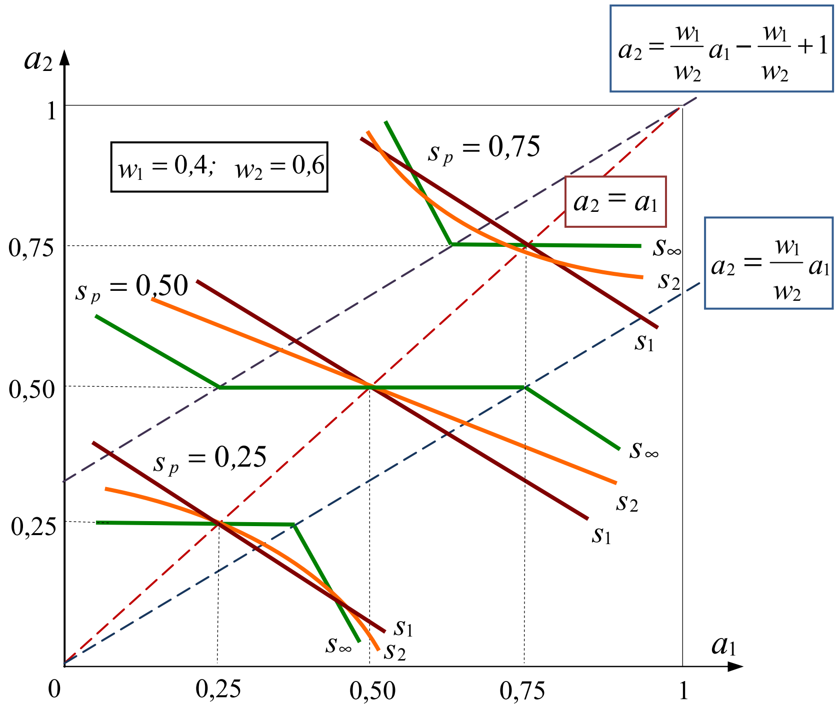
$$s(1) = d^-(1) / [d^*(1) + d^-(1)] = 0{,}407 / (0{,}398 + 0{,}407) = 0{,}505 .$$

Tabela 6 – Vrednosti funkcije $a_2 = f(a_1, w_1, w_2, C)$ za $s_\infty(i) = C$ i dva kriterijuma
Таблица 6 – Значения функции $a_2 = f(a_1, w_1, w_2, C)$ для $s_\infty(i) = C$ с двумя критериями
Table 6 – Values of the function $a_2 = f(a_1, w_1, w_2, C)$ for $s_\infty(i) = C$ and two criteria

$w_1; w_2$	Oblast definisanosti funkcije	Funkcije $a_2 = f(a_1, w, C)$ za $s_\infty(i) = C$
$w_1 < w_2$	a) $a_2 \geq \frac{w_1}{w_2} a_1 - \frac{w_1}{w_2} + 1$	$a_2 = -\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{C}{1-C} a_1 + \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{C}{1-C}$
	b) $\frac{w_1}{w_2} a_1 < a_2 < \frac{w_1}{w_2} a_1 - \frac{w_1}{w_2} + 1$	$a_2 = C$
	c) $a_2 \leq \frac{w_1}{w_2} a_1$	$a_2 = -\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{1-C}{C} a_1 + 1$
$w_1 \geq w_2$	d) $a_2 > \frac{w_1}{w_2} a_1$	$a_2 = -\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{C}{1-C} a_1 + \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{C}{1-C}$
	e) $\frac{w_1}{w_2} a_1 - \frac{w_1}{w_2} + 1 \leq a_2 \leq \frac{w_1}{w_2} a_1$	$a_1 = C$
	f) $a_2 < \frac{w_1}{w_2} a_1 - \frac{w_1}{w_2} + 1$	$a_2 = -\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{1-C}{C} a_1 + 1$

Pošto je $s(1) > 0{,}5$, varijanta V_1 je da je pod „kontrolom" ideala V^*. Vrednosti KSI za referentne tačke su $s(V^*) = 1$ i $s(V^-) = 0$ i predstavljaju rastojanja tačaka V^* i V^- od tačke V^- prema meri $s(i)$.

Prema kriterijumu (12), dobija se rešenje primarnog problema VAO $(V_3; s(3) = 0{,}528)$ i rang-lista varijanata $V_3 - V_1 - V_2 - V_4$ (tabela 5). KSI za najbolju varijantu, predstavlja stepen ispunjenja najpovoljnijih realnih vrednosti kriterijuma (vrednosti za V^*). Kako je $s(3) > 0{,}5$, smatra se da je V_3, kao najbolja u smislu predloženog postupka, dovoljno blizu idealu i da je pod njegovom „kontrolom". KSI varijanata V_2 i V_4 su $s(i) < 0{,}5$ i pokazuju da su te varijante izvan kontrole ideala (pod kontrolom antiideala) i rizične za prihvatanje i realizaciju. Središte primarnog PV $X = \{x_j\}$ zadržalo je svoj početni središnji položaj ($s(X) = 0{,}5$), što navodi na zaključak da se položaj veštačke varijante X ne menja tokom postupka i da se može koristiti kao nova referentna tačka, posebno u analizi odnosa PPV i SPV.



Slika 2 – Funkcije $a_2 = f(a_1, w, C)$ za $s_p(i) = C$ za dva kriterijuma
Рис. 2 – Функция $a_2 = f(a_1, w, C)$ для $s_p(i) = C$ с двумя критериями
Figure 2 – Functions $a_2 = f(a_1, w, C)$ for $s_p(i) = C$ for two criteria

Metod VSI daje mogućnost za primenu različitih koeficijenata linearnih kombinacija λ_p, bez obzira na dimenzije problema γ, kako bi se prednost dala varijantama koje obezbeđuju veću ukupnu korist ili varijantama sa manjim maksimalnim odstupanjima kriterijumskih vrednosti od ideala i/ili većim maksimalnim odstupanjima kriterijumskih vrednosti od antiideala. Izborom drugih vrednosti za λ_p dobijaju se i druga kompromisna rešenja. Primenom izraza (8) i (11) dobijena su rešenja za različite kombinacije λ_p ($\sum_p \lambda_p = 1$ za $p = 1,2,\infty$) (tabela 7).

Tabela 7 – Vektor sličnosti varijanata idealu za različite vrednosti koeficijenata λ_p
Таблица 7 – Вектор сходства вариантов с идеальным при разных значениях коэффициента λ_p
Table 7 – Similarity to ideal vector of alternatives for different values of the coefficients λ_p

Koefic. linearne kombinacije λ_p			Koeficijenti sličnosti varijanata idealu $s(i)$							Rang varijanata $R^S(i)$
			varijante				referentne tačke			
λ_1	λ_2	λ_∞	V_1	V_2	V_3	V_4	X	V^*	V^-	
1	0	0	0,494	0,460	0,559	0,369	0,500	1,000	0,000	**3**-1-2-4
0,8	0,1	0,1	0,499	0,457	0,547	0,381	0,500	1,000	0,000	**3**-1-2-4
0,544	0,275	0,181	0,505	0,452	0,528	0,400	0,500	1,000	0,000	**3**-1-2-4
0,4	0,3	0,3	0,512	0,448	0,510	0,417	0,500	1,000	0,000	**1**-3-2-4
0	1	0	0,511	0,444	0,494	0,437	0,500	1,000	0,000	**1**-3-2-4
0	0	1	0,560	0,417	0,365	0,549	0,500	1,000	0,000	**1**-4-2-3

Kada su $\lambda_{p,\gamma}$ izabrani prema dimenziji problema $\gamma = 5$ (broj kriterijuma) iz tabele 4, dobijeno je osnovno rešenje V_3, koje prema tabeli 3 ima najbolje vrednosti: $d_1^*(3) = min_i\{d_1^*(i)\} = 0{,}441$, $d_2^*(3) = 0{,}271$ i $d_1^-(3) = 0{,}559$, dok prema ostalim vrednostima $d_p^*(i)$ i $d_p^-(i)$ varijanta V_3 nije najbolja.

Promena vrednosti $\lambda_p \in [0{,}1]$ za $\sum_p \lambda_p = 1$ sa izabranim korakom promena (npr: $\Delta\lambda_p = 0{,}05$) i ako je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_\infty$, već za $\Lambda = \{0{,}4;0{,}3;0{,}3\}$, dobija se drugo kompromisno rešenje $(V_1; s(1) = 0{,}512)$ zbog većeg uticaja čistih rastojanja $d_2^*(1)$, $d_2^-(1)$, $d_\infty^*(1)$ i $d_\infty^-(1)$ (tabela 3), dok je istovremeno $s(3) = 0{,}510$. Prednost dobija varijanta V_1 čije kriterijumske vrednosti imaju manje maksimalno odstupanje od ideala i veće maksimalno odstupanje od antiideala nego varijanta V_3, a ukupna korisnost je manje značajna. Sa povećanjem λ_1 raste uticaj $d_1^*(i)$ i $d_1^-(i)$ i preferira se veća ukupna korisnost, pa je pri tome osnovno rešenje V_3 najbolje zbog najpovoljnijih vrednosti čistih rastojanja za $p = 1$.

Vrednosti $s(i)$ za pojedinačne vrednosti $\lambda_p = 1$ jednake su $s_p(i)$ za isti p, što proizlazi iz izraza (8,11,13,15), tako da su vrednosti $s(i)$ za $\Lambda = \{1;0;0\}$ iz tabele 7 jednake vrednostima $s_1(i)$, jer prema (13) za V_1

sledi $s_1(1) = d_1^-(1) / [d_1^*(1) + d_1^-(1)] = 0{,}494 / (0{,}506 + 0{,}494) = 0{,}494$. Isto važi i za vrednosti $p = 2, \infty$. Inače je i $s_1(i) = d_1^-(i)$ zbog $d_1^-(i) + d_1^*(i) = 1$ (ovo rastojanje se koristi i u drugim metodima VAO). Na osnovu vrednosti parcijalnih KSI $s_p(i)$ i prema izrazu (15) dobijene su jedinstvene vrednosti KSI $s'(i) = \sum_p \lambda_{p,\gamma} s_p(i)$ i određen rang varijanata (tabela 5).

Ovakav pristup problemu daje određene slobode DO da utiče na konačno rešenje, odnosno da formira novi skup kompromisnih rešenja u zavisnosti od koeficijenta λ_p i donese odluku zavisno od toga kakve efekte očekuje od rešenja. Kada postoji dilema oko izbora jednog od dva ili više mogućih rešenja (ovde: V_3 ili V_1) mora se uraditi dodatna analiza kvaliteta rešenja uvođenjem dopunskih kriterijuma, preispitivanjem težina kriterijuma i drugo.

Proširenje područja varijanata. Povoljno je da se problem sagleda i u odnosu kriterijumskih vrednosti prema izmenjenom idealu i antiidealu, kada se umanjuje i negativan uticaji transformacije (3), (slika 1). Pretpostavka je da nema promena u kriterijumskim vrednostima realnih varijanata i da je $c_{ij}^S = c_{ij}^N = c_{ij}; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ (indeksi: *(N)* – primarno PV, *(S)* – sekundarno PV), tako da je prema (2), odnos elemenata referentnih tačaka PPV i SPV: $c_j^* \le c_j^{*,*} \wedge c_j^- \ge c_j^{-,-}; j \in J^+$ i $c_j^* \ge c_j^{*,*} \wedge c_j^- \le c_j^{-,-}; j \in J^-$.

Vrednosti elemenata primarnih referentnih tačaka u sekundarnom PV su $a_j^S(V_N^-) = a_j^{S-} \ge 0$ i $a_j^S(V_N^*) = a_j^{S*} \le 1$, a elemenata sekundarnih referentnih tačaka: $a_j^S(V_S^{-,-}) = a_j^{S-,-} = 0$ i $a_j^S(V_S^{*,*}) = a_j^{S*,*} = 1$. Transformacija (3) ima oblik: $a_{ij}^S = (c_{ij} - c_j^{-,-}) / (c_j^{*,*} - c_j^{-,-})$, a veza između a_{ij}^N i a_{ij}^S je linearna: $a_{ij}^S = (a_j^{S*} - a_j^{S-}) a_{ij}^N + a_j^{S-}$.

Za svaki kriterijum definiše se proširenje na osnovu kriterijumskih vrednosti: $e_j = (c_j^{*,*} - c_j^{-,-}) / (c_j^* - c_j^-) \ge 1$, a parcijalna proširenja u odnosu na antiideal i ideal su:

$$e_j^- = (c_j^- - c_j^{-,-}) / (c_j^* - c_j^-) \ge 0; \quad e_j^* = (c_j^{*,*} - c_j^*) / (c_j^* - c_j^-) \ge 0;$$

$$e_j = 1 + e_j^- + e_j^* \ge 1 .$$

Proširenje za kriterijumski sistem je:

$$e_0^- = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot e_j^-; \quad e_0^* = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot e_j^*; \quad e_0 = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot e_j; \; j \in J \text{ i}$$

$$e_0 = 1 + e_0^- + e_0^* \ge 1 .$$

Sledi da je odnos a_{ij}^{N} i a_{ij}^{S} izražen preko proširenja:

$$a_{ij}^{S} = (1/e_j)\,a_{ij}^{N} + (e_j^{-}/e_j);\;\; e_j^{-} \geq 0;\;\; e_j \geq 1;\;\; i = \overline{1,m};\;\; j = \overline{1,n}. .$$

Sekundarno PV formira se i kada se određuje samo novi antiideal sa vrednostima izvan PPV ili u kombinaciji sa vrednostima na granici PPV: $V_S^{-,-} = \{c_j^{-,-};\, j = \overline{1,n}\}$. Za većinu monotono rastućih kriterijuma vrednosti $c_j^{-,-} = 0;\, j \in J^{*}$, kao i za monotono opadajuće kriterijume vrednosti $c_j^{*,*} = 0;\, j \in J^{-}$, nisu realne niti opravdane; tako u primeru: za $K_1;\, j = 1 \in J^{*}$ − *godišnji prihod*, nema smisla razmatrati varijantu čiji je prihod jednak 0 ili za $K_2;\, j = 2 \in J^{-}$ − *godišnji troškovi održavanja postrojenja*, nema smisla varijanta za koju ne postoje troškovi održavanja.

Ako su vrednosti elemenata ideala ostale nepromenjene: $c_j^{*,*} = c_j^{*}$ i $V_S^{*,*} = V_N^{*} = \{418;62;1134;36;154\}$ (prema tabeli 1), a vrednosti elemenata postojećeg antiideala $V_N^{-} = \{352;90;970;60;120\}$ zamenjene novim vrednostima koje su određene kao najnepovoljnije kriterijumske vrednosti koje DO može da prihvati (kritične vrednosti kriterijuma): $V_S^{-,-} = \{290;105;850;72;90\}$, proširenja na osnovu kriterijumskih vrednosti i prema pojedinačnim kriterijumima su $e_j = \{1{,}485;1{,}357;1{,}366;1{,}417;1{,}441\}$, parcijalna proširenja $e_j^{*} = 0;\, \forall j \in J$ i $e_j^{-} = \{0{,}485;0{,}357;0{,}366;0{,}417;0{,}441\}$, a ukupno za sistem proširenje PV je $e_0 = 1{,}402$.

Proširenje PV prema metodu VSI[1] je:

$$\varepsilon_0 = 1 + d^{S-}(V_N^{-}) / d^{S}(V_N^{-};V_N^{*}) + d^{S*}(V_N^{*}) / d^{S}(V_N^{-};V_N^{*}) = 1 + \varepsilon_0^{-} + \varepsilon_0^{*}.$$

Između proširenja e_0 i ε_0 postoji nelinearna funkcionalna veza $\varepsilon_0 = f(w_j, e_j, \lambda_{p,\gamma})$. Prema metodu VSI proširenje je $\varepsilon_0 = 1{,}397$.

---

[1] Veličine su označene prema slici 1, a odnose se na sekundarno PV; rastojanje $d^{S}(V_N^{-};V_N^{*}) = \sum_p \lambda_{p,\gamma} d_p^{S}(V_N^{-};V_N^{*})$ je ukupno rastojanje za $p = 1{,}2.\infty$ između primarnog antiideala V_N^{-} i ideala V_N^{*} u sekundarnom PV; vrednosti $d^{S-}(V_N^{-})$, $d^{S*}(V_N^{*})$ i $d^{S}(V_N^{-};V_N^{*})$ su iz intervala [0,1].

Proširenje dobijeno prema vrednostima KSI za primarne i sekundarne referentne tačke daje rezultate bliske već opisanim proširenjima:

$\varepsilon_0^{/} = [s^S(V_S^{*,*}) - s^S(V_S^{-,-})] / [s^S(V_N^{*}) - s^S(V_N^{-})]$; ovde je $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^{/} = 1{,}397$, zbog $e_j^{*} = 0; \forall j \in J$. Znači, prema svim primenjenim izrazima, na osnovu novog antiideala, primarno PV je prošireno za oko 40%.

Proširenja e_0 je nezavisno, a proširenja ε_0 i $\varepsilon_0^{/}$ su zavisna od koeficijenata $\lambda_{p,\gamma}$, odakle nastaju i manje vrednosne razlike među njima, nebitne za praktičnu primenu, pa se mogu koristiti sva tri izraza.

Posledica primene antiideala izvan PPV je povećanje raspona kriterijumskih vrednosti prema kojima se vrše transformacije (3) i povećanje vrednosti transformisanih koeficijenata $a_{ij}^S > a_{ij}^N$ (osim za $a_j^{S*,*} = a_j^{N*} = 1$), što prividno povećava kvalitet varijanata, jer su vrednosti a_{ij}^S bliže idealu $a_j^{S*,*} = 1$ i dalje od antiideala $a_j^{S-,-} = 0$. Za $p = 1{,}2$ smanjene su vrednosti „čistih" rastojanja *Lp* metrike prema idealu $d_p^{S*}(i) < d_p^{N*}(i)$ i povećane vrednosti „čistih" rastojanja *Lp* metrike prema antiidealu $d_p^{S-}(i) > d_p^{N-}(i)$, a za $p = \infty$ taj odnos može da ostane i nepromenjen $d_\infty^{S*}(i) \le d_\infty^{N*}(i)$ i $d_\infty^{S-}(i) \ge d_\infty^{N-}(i)$.

Za sekundarni problem VSI je $S^S = \{0{,}669; 0{,}658; 0{,}710; 0{,}640\}$ i rešenje $(V_3; s^S(3) = 0{,}710)$. Vrednosti KSI su znatno veće od vrednosti KSI u osnovnom rešenju $S = S^N = \{0{,}505; 0{,}452; 0{,}528; 0{,}400\}$, smanjen je raspon KSI $max\{s^S(i)\} - min\{s^S(i)\} = 0{,}710 - 0{,}640 = 0{,}070$ u odnosu na osnovno rešenje ($max\{s^N(i)\} - min\{s^N(i)\} = 0{,}128$), čime je smanjena i oštrina ocena među varijantama, ali je zadržan osnovni rang varijanata.

Uvođenjem „realnog" antiideala izvan PPV i formiranjem sekundarnog PV, ima smisla govoriti i o stvarnoj blizini varijante idealu ili njenoj sličnosti sa njim (npr: „varijanta V_3, prema primenjenom metodu i zbog $s(3) = 0{,}710$, ispunjava maksimalne zahteve DO u obimu od oko 70%").

Kompromisna rešenja i na osnovu njih dobijeno jedinstveno rešenje problema VAO treba da predstavljaju polazno stanovište DO pre donošenja svoje konačne odluke za izbor rešenja. Donosilac odluke ima dobru osnovu i argumente za svoju odluku, ali rešenja dobijena primenom metoda VSI (ili drugih metoda) ne moraju da se podudaraju sa njegovim izborom. Konačnu odluku o prihvatanju rešenja za realizaciju ipak donosi DO, a ovaj postupak samo treba da mu pomogne u tome.

Zaključak

U radu je prikazana primena *Lp* metrike za rešavanje problema VAO. Na osnovu rastojanja između *n*-dimenzionalnih tačaka koje predstavljaju varijante i referentnih tačaka (ideala i antiideala), za karakteristične vrednosti parametra *Lp* metrike $(p = 1, 2, \infty)$ dobijeno je šest kompromisnih rešenja. „Pomirenje" takvih rešenja izvršeno je formiranjem dve linearne kombinacije (prema idealu i antiidealu) sa koeficijentima koji predstavljaju relativnu verodostojnost rastojanja *Lp* metrike i na taj način su dobijena još dva kompromisna rešenja. Primena linearnih kombinacija funkcija *Lp* metrike omogućava DO da izvrše rangiranje varijanata prema zahtevima za ukupnu korist, geometrijsku blizinu ili minimaks odstupanja kriterijumskih vrednosti od ideala i antiideala ili njihovim kombinacijama. U tom postupku, kroz izbor koeficijenata linearnih kombinacija, DO može da izrazi i svoj odnos prema uticaju parametra *Lp* metrike (*p*) na rešenja. Konačno rešenje dobijeno je poređenjem varijanata prema vrednostima elemenata vektora sličnosti varijanata idealu, kojim je obuhvaćen i odnos varijanata prema antiidealu.

Iako se metodom dobija jedno rešenje kao najbolje, korisno je da se poznaje i više kompromisnih rešenja, posebno u uslovima većeg broja kriterijuma i varijanata. Postojanje više kompromisnih rešenja važno je za DO, kako bi u odnosu na stvarne kriterijumske vrednosti sagledao posledice izbora nekog od tih rešenja.

U radu je izvršena i analiza kompromisnih rešenja, dobijenih na osnovu vrednosti parcijalnih KSI, pri čemu su izvedeni i potrebni izrazi za konstantnu vrednost KSI i $p = 1, 2, \infty$. Radi otklanjanja negativnosti koje nastaju kao posledica transformacije realnih kriterijumskih vrednosti u bezdimenzionalne parametre (na osnovu dužine intervala vrednosti po kriterijumima), definisan je antiideal izvan PPV i primenom metoda VSI je određeno rešenje. Dobijene vrednosti KSI predstavljaju realniju ocenu kvaliteta varijanata u odnosu na idealno rešenje, pod uslovom da je sekundarni antiideal određen na osnovu sistemske analize problema.

U daljem razvoju metoda VSI, o čemu nije bilo reči u ovom radu, razmatrana je osetljivost rešenja na promenu težina kriterijuma i uticaj proširenja područja varijanata na rešenja problema VAO.

Softverska podrška metodu VSI pruža mogućnosti izbora jedne, dve ili tri funkcije *Lp* metrike, veliki broj kriterijuma i varijanata i omogućava primenu metoda u realnom vremenu i kada se uslovi primene rešenja brzo menjaju. Ugradnjom testa efikasnosti omogućuje se određivanje efikasnih, dominantnih i dominiranih varijanata. Nadogradnjom softvera elementima različitih oblasti ljudskog delovanja (sistem odbrane, ekologija, obrazovanje, zdravstvo, privreda i dr.), može se poboljšati efikasnost odlučivanja u tim oblastima.

Literatura

Blagojević, B., Matić-Kekić, S., 2012, Grupno određivanje težina za evaluaciju ergonomskih karakteristika traktora, *Savremena poljoprivredna tehnika,* 38(3), pp.255-266.

Hwang, C.L., & Yoon, K., 1981, *Multiple Attribute Decision Making*, New York: Springer-Verlag.

Milićević, M., Župac, G., 2012a, Objektivni pristup određivanju težina kriterijuma, *Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier*, 60(1), pp.39-56.

Milićević, M., Župac, G., 2012b, Subjektivni pristup određivanju težina kriterijuma, *Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier*, 60(2), pp.48-70.

Nikolić, I., Borović, S., 1998, *Višekriterijumska optimizacija*. Beograd: Vojnoizdavački zavod.

Opricović, S., 1986, *Višekriterijumska optimizacija*, Beograd; Naučna knjiga.

Opricović, S., 1998, *Višekriterijumska optimizacija sistema u građevinarstvu*, Beograd, Građevinski fakultet.

Yoon, K. 1987. A Reconciliation Among Discrete Compromise Solutions, *Journal of the Operational Research Society,* 38(3), str.277-286. doi:10.1057/jors.1987.44

Zeleny, M., 1982, *Multiple Criteria Decision Making*. New York: McGraw-Hill.

МЕТОД ВЕКТОРА СХОДСТВА ВАРИАНТОВ С ИДЕАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ

Радомир Р. Джукич
г. Крушевац

ОБЛАСТЬ: оперативные исследования, мультиатрибутное суждение
ВИД СТАТЬИ: оригинальная научная статья
ЯЗЫК СТАТЬИ: сербский

Резюме:

В работе рассматриваются процессы решения проблем мультиатрибутного суждения на одном из уровней критериев, а также представлен метод компромиссного программирования, Lp матрицы и метод TOPSIS.

В работе представлены рекомендации для создания первичной матрицы суждения и трансформации различных критериев значений. Компромиссные решения выводятся на основании значений функций Lp метрики и их комбинирования с коэффициентом – функций относительной точности, зависящих от характера проблемы.

Полученные решения зависят от параметров p и Lp метрики, являющихся балансным фактор между самым благоприятным решением и решениями с относительными (мин/макс) отклонениями в значениях критериев от идеального и антиидеального.

В случае, если требуется единое решение, необходимо объединить все функции Lp метрики и применить вектор сходства вариантов идеалу, который включает влияние анти-идеала.

В работе приведен пошаговый процесс принятия компромиссных решений, принятых на основании элементов частичного сходства с идеалом и влияния на решение субъективно определенного анти-идеала. Для наглядности применения данного метода приведены численные примеры.

Ключевые слова: *многокритериальное принятие решений (MCDM) трансформация значений критериев, компромиссное решение, идеальное решение, Lp метрика, вектор сходства с идеалом (VSI).*

METHOD OF THE VECTOR OF SIMILARITY TO IDEAL SOLUTION IN ALTERNATIVES

Radomir R. Đukić
Kruševac

FIELD: Operational research, Multiple-attribute decision-making
ARTICLE TYPE: Original scientific paper
ARTICLE LANGUAGE: Serbian

Summary:

A method for solving multiple-attribute decision-making problems at one criterion level is discussed, followed by a presentation of a method based on compromise programming elements, Lp metrics and the TOPSIS method. Suggestions for forming the initial decision-making matrix have been given as well as for the transformation of multiple criteria values. Compromise solutions are obtained based on the values of Lp metrics functions and their combinations with coefficients – functions of relative credibility depending on solution dimensions. The obtained solutions depend on the parameter p in Lp metrics, parameter p being a balancing factor between the solution with the highest total utility and the solution with minimax deviations of criteria values from the ideal and negative-ideal solutions. If a unique solution is required, it is obtained by encompassing all Lp metrics functions and by applying the vector of similarity to ideal solution, which also includes the negative-ideal solution influence. The article shows a method for obtaining compromise solutions based on the values of elements of partial similarity to ideal vectors and the influence of a subjectivelly determined negative ideal on solutions. The method application has been illustrated by a numerical example.

Introduction

Problems of multiple-attribute decision-making (MADM) are defined as a class of multiple-criteria decision-making (MCDM) problems for which there is a mathematical model formed but no unique optimal solution. MADM methods ('soft' methods) are used to solve 'poorly structured' MCDM problems. The procedure for solving MADM problems is based on Lp metrics, compromise programming and the TOPSIS method. Compromise solutions obtained by applying Lp metrics parameters (p) further give the final solution (the best alternative) which is obtained using the values of the elements of the vector of similarity to ideal solution (VSIS) which encompasses the parameters of the relation of alternatives with the ideal and negative-ideal solutions.

Decision-making matrix and spaces of alternatives

Initial decision-making matrix

A decision-making matrix for a MADM problem is given by real criterion values, their estimates or estimates of attributes. A preparation of the decision-making matrix for the application of the MADM method requires a systematic preliminary analysis of a problem in question. The initial decision-making matrix is possible to be formed in many ways, but a usual sequence of phases is: preliminary analysis and determination of MADM goals; problem structuring; data collection, and determination of criteria values.

Primary and secondary space of alternatives

Spaces of alternatives are defined with reference to the chosen referent points: the ideal solution and the negative-ideal solution. The primary space of alternatives (PSA) is formed in the range of the 'perceived' ideal solution and the negative-ideal solution while the secondary space of alternatives (SSA) is formed within the limits of the 'preferable' ideal solution and the 'requested' negative-ideal one. By determining the ideal and negative-ideal solutions subjectivelly, a decision-maker (DM) determines the range of criteria or the interval of acceptable values for each criterion. In reality, it is much more difficult to determine the ideal solution than the negative-ideal solution, so it makes sense to determine also the position of an alternative in relation to the negative-ideal solution. For illustrating the VSIS method with a numerical example, a decision-making matrix with four alternatives and five criteria has been formed.

Transformation of criteria values

Since measurement units are different for different criteria (heterogeneous criteria system), the elements of the initial matrix are transformed into dimensionless parameters in the interval [0,1]. In this *article, the author used the transformation based on criteria values range (interval length), i.e. the absolute difference between the best and the worst criterion value:* $a_{ij}=(c_{ij}-c_j^-)/(c_j^*-c_j^-)$, $0 \le a_{ij} \le 1$. *Such a transformation is possible when the criteria are mutually independent or when their mutual dependence is not taken into account. The transformation is not without flaws, since criteria values for criteria with a narrower range become more prominent than those with a wider range, which is due to the choice of the ideal and negative-ideal solutions from known criteria values ('perceived' values).*

Application of Lp metrics in MADM

Lp metrics in MADM is a measure of the distance of alternatives from the ideal solution and the negative-ideal solution; it is the basis for determination of compromise solutions. The application of different values for the Lp metrics parameter $p \in [1,\infty)$ *results in more than one solution (solution is the best alternative), i.e. compromise solutions of MADM problems. The most frequently applied parameters are* $p=1,2,\infty$, *for which, regardless of SA, distances of alternatives* $V_i=\{a_{ij}\}$ *from the ideal* $d_p^*(i)=L_p(V^*;V_i)$ *and negative-ideal solutions* $d_p^-(i)=L_p(V^-;V_i)$ *are defined, and based on their values up to six different compromise solutions are obtained (the best alternative and a ranking list of alternatives). Which ranking list the decision-maker is going to accept depends on taking into account the parameter p influence on overall effects. The method enables usage of other parameter p values for obtaining compromise solutions. Two new compromise solutions are obtained by 'reconciling' non-adapted ranks and by applying the linear combination of Lp metrics function values.*

Vector of similarity to ideal solution in alternatives

The vector of similarity to ideal solution (VSIS) in alternatives is, according to all criteria, a multidimensional vector $S=\{s(i);\ i=\overline{1,m}\}$, *the elements (coefficients of similarity to ideal solution – CSIS) of which are determined based on diverse distances* $d^*(i)$ *and* $d^-(i)$: $s(i)=d^-(i)/[d^*(i)+d^-(i)]$; $0 \le s(i) \le 1$. *Based on a partial VSIS, compromise solutions based on 'pure' Lp metrics distances are also possible. The application of the VSIS results in a unique solution of an MADM problem, with the influence of the negative-ideal solution taken into account. By a further definition of the secondary negative-ideal solution and a subsequent extension of the PSA, the drawbacks of the applied decision-making matrix transformation are partially eliminated and more realistic parameters of alternatives are obtained. It is also possible to determine the values of the extension of the space of alternatives, as factors influencing new coefficients of similarity to ideal* *solutions. The compromise solutions and, based on them, the obtained unique solution of the MADM problem should represent a starting point for decision-makers before they make a final decision. Decision-makers have a good basis as well as arguments for a choice of either one of compromise solutions or a unique solution; however, these solutions do not need to be their final choice. This procedure is to help them in their final decision.*

Conclusion

The application of Lp metrics for solving an MADM problem has been shown in the article. Based on the distances between n-dimensional points representing alternatives and referent points (the ideal and negative-ideal solutions), six compromise solutions have been obtained for the characteristic values of the Lp metrics parameter $(p = 1, 2, \infty)$. *'Reconciliation' of such solutions has been done by forming two linear combinations (based on the ideal solution and the negative-ideal solution) with coefficients representing relative credibility of the Lp metrics distance, thus resulting in two more compromise solutions. The application of the linear combinations of the Lp metrics functions helps the decision-maker to rank alternatives in accordance with requests for overall utility, geometric proximity or minimax deviations of criteria values from the ideal and negative-ideal solutions or their combinations. During the procedure, while choosing coefficients of linear combinations, decision-makers can express their attitude towards the influence of the parameter p on solutions. The final solution is obtained by ranking alternatives according to the values of the elements of the vector of similarity to ideal solution, which encompasses the relation of alternatives towards the negative-ideal solution as well. Software support to the VSIS method enables a choice of one, two or three functions of Lp metrics, a large number of criteria and subcriteria as well as the application of the method in real time under fast changing external conditions. Updating the software with elements from different human activities (military issues, ecology, education, health systems, economy issues, etc.) can enhance decision-making in these fields.*

Key words: *multiple-criteria decision- making (MCDM), transformation criterion values, compromise solution, ideal solution, Lp metrics, vector of similarity to ideal solution.*

Datum prijema članka / Дата получения работы / Paper received on: 03. 06. 2015.
Datum dostavljanja ispravki rukopisa / Дата получения исправленной версии работы / Manuscript corrections submitted on: 20. 07. 2015.
Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje / Дата окончательного согласования работы / Paper accepted for publishing on: 22. 07. 2015.